Mathe Quiz

Rolf Lang

18. Dezember 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **7**

2 Aufgaben aus der Geometrie **9**

2.1 Flächen Relation 10
2.2 Viertelkreis - Kreis 11
2.3 Erweiterung Viertelkreis - Kreis 12
2.4 Halbkreis - Dreieck 13
2.5 Kreis Sichel 14
2.6 Tangenten - Verhältnis 15
2.7 Drei Kreise 16
2.8 Quadrat - Kreis 17
2.9 Sehnen Satz 18
2.10 Sekanten - Satz 19
2.11 8-eck Verhältnis 20
2.12 8 Halbkreise im Quadrat 21
2.13 8-eck Schleife 22
2.14 Spitzes Dreieck 23
2.15 Zerteiltes Dreieck 24
2.16 Kreis mit 3 Sehnen 25
2.17 2 Halbkreise mit Kreis 26
2.18 2 Halbkreise mit Kreis II 27
2.19 2 Tangenten 28
2.20 Rechteck mit Kreis 29
2.21 Rechteck mit Halbkreis 30
2.22 Leiter 31
2.23 Winkel im Dreieck 32
2.24 Dreiecke im Quadrat 33

2.25 2 Kreise im Rechteck 34
2.26 2 Kreise mit Dreieck 35
2.27 Kreis und Halbkreis 36
2.28 Verhältnisse im 9-eck 37
2.29 Stern und 8-eck 38
2.30 2 Quadrate 39
2.31 3 Viertelkreise im Rechteck 40
2.32 4 Vierecke im Rechteck 41
2.33 4 Quadrate 42
2.34 5 Rechtecke 43
2.35 3 Kreise 44
2.36 Viertel- Halb- Kreis 45
2.37 3 Kreise im Quadrat 46
2.38 3 Kreise 47

3 Lösungen **49**
3.1 Lösung: Flächen Relation 50
3.2 Lösung: Viertelkreis - Kreis 52
3.3 Lösung: Erweiterung Viertelkreis - Kreis . 53
3.4 Lösung: Halbkreis - Dreieck 55
3.5 Lösung: Kreis Sichel 56
3.6 Lösung: Tangenten - Verhältnis 57
3.7 Lösung: Drei Kreise 59
3.8 Lösung: Quadrat - Kreis 60
3.9 Lösung: Sehnen Satz 62
3.10 Lösung: Sekanten - Satz 63
3.11 Lösung: 8-eck Verhältnis 64
3.12 Lösung: 8 Halbkreise im Quadrat 65
3.13 Lösung: 8-eck Schleife 66
3.14 Lösung: Spitzes Dreieck 68
3.15 Lösung: Zerteiltes Dreieck 70
3.16 Lösung: Kreis mit 3 Sehnen 72
3.17 Lösung: 2 Halbkreise mit Kreis 74
3.18 Lösung: 2 Halbkreise mit Kreis II 76
3.19 Lösung: Lösung 2 Tangenten 78
3.20 Lösung: Rechteck mit Kreis 79
3.21 Lösung: Rechteck mit Halbkreis 81
3.22 Lösung: Leiter 83

3.23 Lösung: Winkel im Dreieck 85
3.24 Lösung: Dreiecke im Quadrat 87
3.25 Lösung: 2 Kreise im Rechteck 88
3.26 Lösung: 2 Kreise mit Dreieck 90
3.27 Lösung: Kreis und Halbkreis 92
3.28 Lösung: Verhältnisse im 9-eck 93
3.29 Lösung: Stern und 8-eck 95
3.30 Lösung: 2 Quadrate 96
3.31 Lösung: 3 Viertelkreise im Rechteck 97
3.32 Lösung: 4 Vierecke im Rechteck 98
3.33 Lösung: 4 Quadrate 100
3.34 Lösung: 5 Rechtecke 102
3.35 Lösung: 3 Kreise 103
3.36 Lösung: Viertel- Halb- Kreis 104
3.37 Lösung: 3 Kreise im Quadrat 105
3.38 Lösung: 3 Kreise 106

4 Sätze **107**
4.1 Pythagoras 108
4.2 Höhensatz 109
4.3 Kathetensatz 110
4.4 Sinussatz 111
4.5 Cosinussatz 112
4.6 Dreiecks Ungleichung 113
4.7 Innenwinkelsatz 114
4.8 Umfangwinkel-Satz 115
4.9 Sehnen-Satz 116
4.10 Sekanten-Satz 117
4.11 Tangenten-Sekanten-Satz 118

5 Beweise **119**
5.1 Beweis: Pythagoras 120
5.2 Beweis: Höhensatz 121
5.3 Beweis: Kathetensatz 122
5.4 Beweis: Sinussatz 124
5.5 Beweis: Cosinussatz 125
5.6 Beweis: Dreiecks Ungleichung 126
5.7 Beweis: Innenwinkelsatz 127

5.8 Beweis: Umfangwinkel-Satz 128
5.9 Beweis: Sehnen-Satz 129
5.10 Beweis: Sekanten-Satz 130
5.11 Beweis: Tangenten-Sekanten-Satz 131

Abbildungsverzeichnis

2.1 Flächen Relation 10
2.2 Viertelkreis - Kreis 11
2.3 Erweiterung Viertelkreis - Kreis 12
2.4 Halbkreis - Dreieck 13
2.5 Kreis Sichel 14
2.6 Tangenten - Verhältnis 15
2.7 Drei Kreise 16
2.8 Quadrat - Kreis 17
2.9 Sehnen Satz 18
2.10 Sekanten - Satz 19
2.11 8-eck Verhältnis 20
2.12 8 Halbkreise im Quadrat 21
2.13 8-eck Schleife 22
2.14 Spitzes Dreieck 23
2.15 Zerteiltes Dreieck 24
2.16 Kreis mit 3 Sehnen 25
2.17 2 Halbkreise mit Kreis 26
2.18 2 Halbkreise mit Kreis II 27
2.19 2 Tangenten 28
2.20 Rechteck mit Kreis 29
2.21 Rechteck mit Halbkreis 30
2.22 Leiter 31
2.23 Winkel im Dreieck 32
2.24 Dreiecke im Quadrat 33
2.25 2 Kreise im Rechteck 34
2.26 2 Kreise mit Dreieck 35
2.27 Kreis und Halbkreis 36
2.28 Verhältnisse im 9-eck 37

2.29 Stern und 8-eck 38
2.30 2 Quadrate 39
2.31 3 Viertelkreise im Rechteck 40
2.32 4 Vierecke im Rechteck 41
2.33 4 Quadrate 42
2.34 5 Rechtecke 43
2.35 3 Kreise 44
2.36 Viertel- Halb- Kreis 45
2.37 3 Kreise im Quadrat 46
2.38 3 Kreise 47

3.1 Lösung Flächen Relation 50
3.2 Lösung Viertelkreis - Kreis 52
3.3 Lösung Erweiterung Viertelkreis - Kreis . . 53
3.4 Lösung Halbkreis - Dreieck 55
3.5 Lösung Kreis Sichel 56
3.6 Lösung Tangenten - Verhältnis 57
3.7 Lösung Drei Kreise 59
3.8 Lösung Quadrat - Kreis 60
3.9 Lösung Sehnen Satz 62
3.10 Lösung Sekanten - Satz 63
3.11 Lösung 8-eck Verhältnis 64
3.12 Lösung 8 Halbkreise im Quadrat 65
3.13 Lösung 8-eck Schleife 66
3.14 Lösung Spitzes Dreieck 68
3.15 Lösung Zerteiltes Dreieck 70
3.16 Lösung Kreis mit 3 Sehnen 72
3.17 Lösung 2 Halbkreise mit Kreis 74
3.18 Lösung 2 Halbkreise mit Kreis II 76
3.19 Lösung 2 Tangenten 78
3.20 Lösung Rechteck mit Kreis 79
3.21 Lösung Rechteck mit Halbkreis 81
3.22 Lösung Leiter 83
3.23 Lösung Winkel im Dreieck 85
3.24 Lösung Dreiecke im Quadrat 87
3.25 Lösung 2 Kreise im Rechteck 88
3.26 Lösung Lösung 2 Kreise mit Dreieck 90
3.27 Lösung Kreis und Halbkreis 92

3.28 Lösung Verhältnisse im 9-eck 93
3.29 Lösung Stern und 8-eck 95
3.30 Lösung 2 Quadrate 96
3.31 Lösung 3 Viertelkreise im Rechteck 97
3.32 Lösung 4 Vierecke im Rechteck 98
3.33 Lösung 4 Quadrate 100
3.34 Lösung 5 Rechtecke 102
3.35 Lösung 3 Kreise 103
3.36 Lösung Viertel- Halb- Kreis 104
3.37 Lösung 3 Kreise im Quadrat 105
3.38 Lösung 3 Kreise 106

4.1 Pythagoras 108
4.2 Höhensatz 109
4.3 Kathetensatz 110
4.4 Sinussatz 111
4.5 Cosinussatz 112
4.6 Dreiecks Ungleichung 113
4.7 Innenwinkelsatz 114
4.8 Umfangwinkel-Satz 115
4.9 Sehnen-Satz 116
4.10 Sekanten-Satz 117
4.11 Tangenten-Sekanten-Satz 118

5.1 Beweis: Pythagoras 120
5.2 Beweis: Höhensatz 121
5.3 Beweis: Kathetensatz 122
5.4 Beweis: Sinussatz 124
5.5 Beweis: Dreiecks Ungleichung 126
5.6 Beweis: Innenwinkelsatz 127
5.7 Beweis: Umfangwinkel-Satz 128
5.8 Beweis: Sehnen-Satz 129
5.9 Beweis: Sekanten-Satz 130
5.10 Beweis: Tangenten-Sekanten-Satz 131

Kapitel 1

Einleitung

Dies ist eine Sammlung von netten Mathematik Aufgaben, welche durchaus lösbar sind, auch ohne tiefere Mathematik Kenntnis. Ich hoffe, es macht dir ebenso viel Freude beim Knobeln und Lösen dieser Aufgaben.
Danke an alle, welche zum Gelingen dieses Werkes beigetragen haben.
Auch wenn ich mich bemüht habe, so sind Fehler nicht auszuschliessen. Diese korrigiere ich gerne.

Kapitel 2

Aufgaben aus der Geometrie

2.1 Flächen Relation

Gegeben sei ein Quadrat, welches ein Viertelkreis und eine Diagonale besitzt. Im Punkt P auf dem Viertelkreis verlaufen 2 Geraden parallel zum Quadrat und bilden eine Dreiecks- und eine rechteckige Fläche.

Frage:
Wie ist das Verhältnis der beiden schraffierten Flächen zueinander?

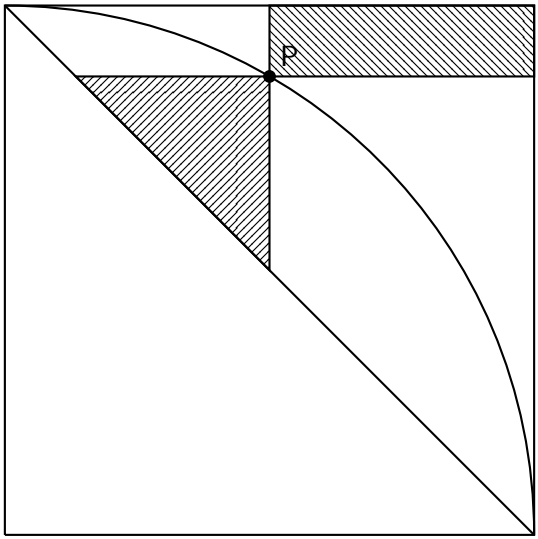

Abbildung 2.1: Flächen Relation

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 50.

2.2 Viertelkreis - Kreis

Gegeben sei ein innen liegender Kreis in einem Viertelkreis. Parallel zur Gundlinie liegt tangential eine Gerade $\overline{AB}$ der Länge 12.

Frage:
Wie groß ist die schraffierte Flächen?

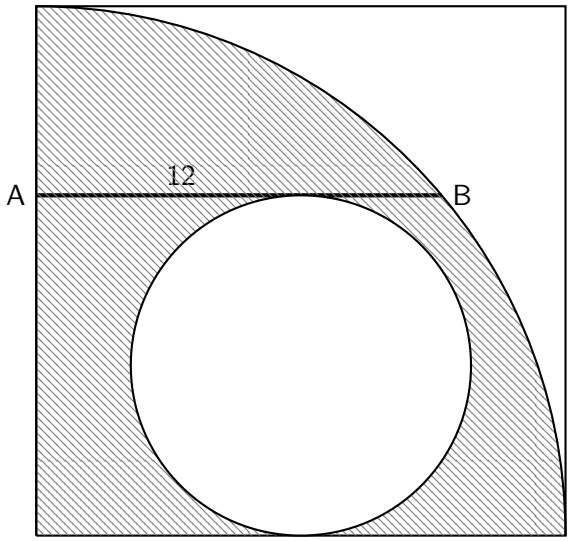

Abbildung 2.2: Viertelkreis - Kreis

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 52.

2.3 Erweiterung Viertelkreis - Kreis

Bei genauerer Betrachtung der Aufgabe ‘Viertelkreis - Kreis’ stellt man fest, dass bei wachsendem Innenkreis Radius r dieser irgendwann nicht mehr in den Viertelkreis hineinpasst.

Frage:
bis zu welchem Radius r des Innenkreises ist die Aufgabe ‘Viertelkreis - Kreis’ lösbar?

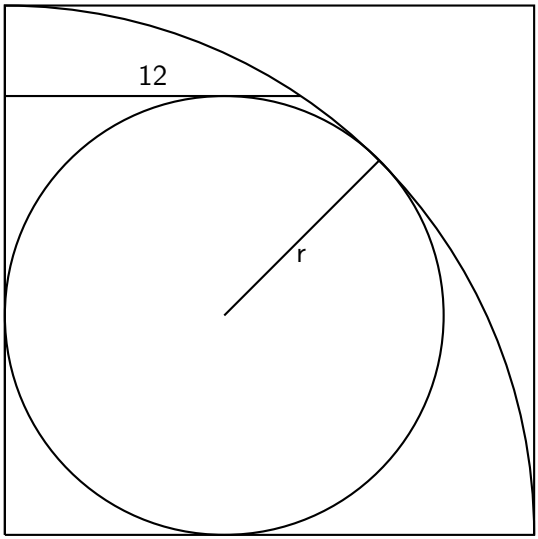

Abbildung 2.3: Erweiterung Viertelkreis - Kreis

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 53.

2.4 Halbkreis - Dreieck

Gegeben sei ein Halbkreis und ein rechtwinkliges Dreieck. Die Fläche des Halbkreises ist um 47 größer als die des Dreiecks.

Frage:
Wie groß ist die Höhe x des Dreiecks?

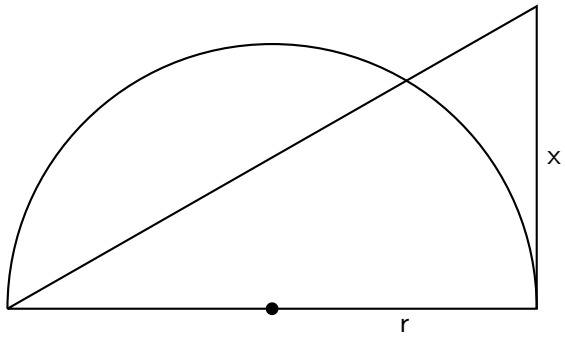

Abbildung 2.4: Halbkreis - Dreieck

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 55.

2.5 Kreis Sichel

Gegeben ist eine Figur welche durch 3 Halbkreise mit den 3 Radien r_1, r_2, r_3 begrenzt ist.

Frage:
Wie groß ist die Fläche bei gegebener Strecke $h = \sqrt{2}$?

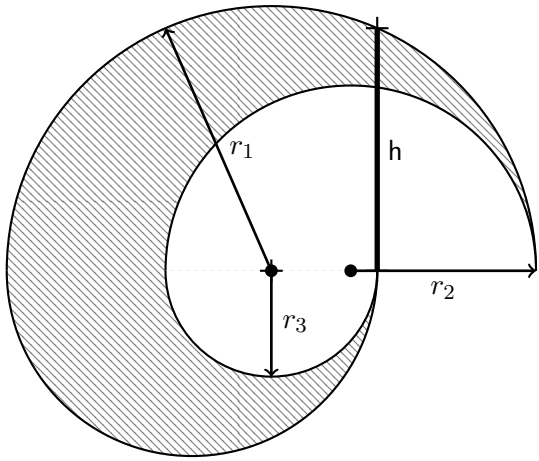

Abbildung 2.5: Kreis Sichel

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 56.

2.6 Tangenten - Verhältnis

Gegeben sei ein Rechteck mit einem innerern Kreis. Von allen 4 Ecken des Rechtecks verlaufen die Tangenten[1] $t1, t2, t3$ und $t4$ an den Kreis.

Frage:
Wie groß ist die Tangente $t4$ in Abhängigkeit von $t1, t2, t3$?

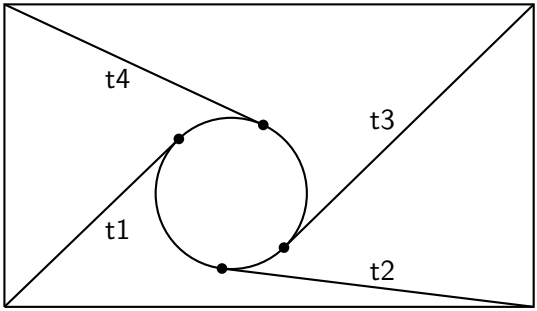

Abbildung 2.6: Tangenten - Verhältnis

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 57.

[1] Eine Tangente ist eine lineare Funktion , die die Funktion f (hier Kreis) an einem Punkt berührt.

2.7 Drei Kreise

Drei Kreise mit den Radien $r_1 = 3, r_2 = 4, r_3 = 6$ sind dicht in ein Rechteck gepackt.

Frage:
Wie lang ist die Basis l des Rechtecks?

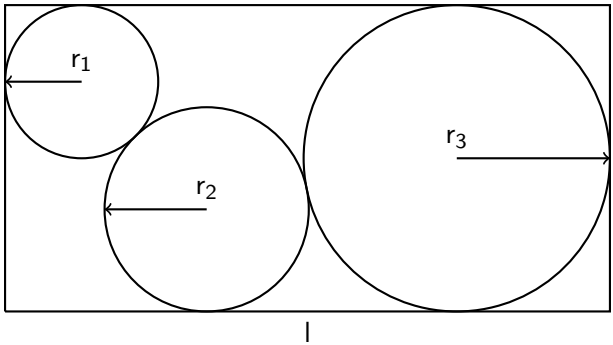

Abbildung 2.7: Drei Kreise

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 59.

2.8 Quadrat - Kreis

Gegeben sei ein Quadrat und ein Kreis. Der Kreis berührt das Quadrat an 3 Punkten: Der linken und rechten oberen Ecke und in der Mitte der Grundlinie. Der obere Abstand a des Kreises vom Quadrat beträgt 1.

Frage:
Wie groß ist die Seitenlänge x des Quadrats?

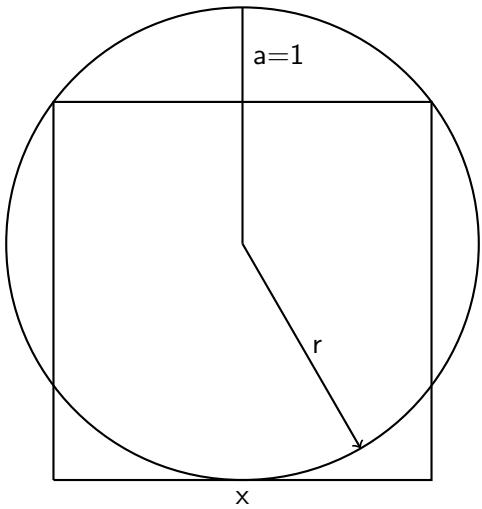

Abbildung 2.8: Quadrat - Kreis

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 60.

2.9 Sehnen Satz

Gegeben sei ein Kreis mit den Sehnen[2] $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ und dem Schnittpunkt S.

Frage:
Wie läßt sich $\overline{AS}$ bestimmen, wenn $\overline{BS}$, $\overline{CS}$ und $\overline{DS}$ bekannt sind?

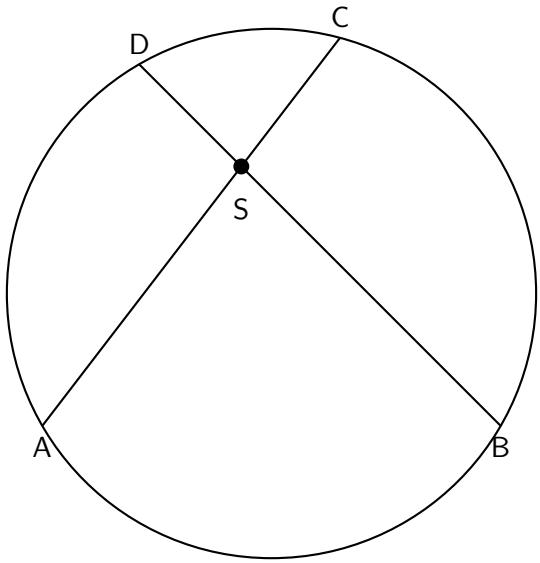

Abbildung 2.9: Sehnen Satz

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 62.

[2]Eine Sehne einer ebenen Kurve ist eine Verbindungsstrecke zweier Punkte auf der Kurve.

2.10 Sekanten - Satz

Gegeben sei ein Kreis mit den Sekanten[3] $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ und dem Schnittpunkt S ausserhalb des Kreises.

Frage:
bis zu welchem Radius r des Innenkreises ist die Aufgabe 'Viertelkreis - Kreis' lösbar?

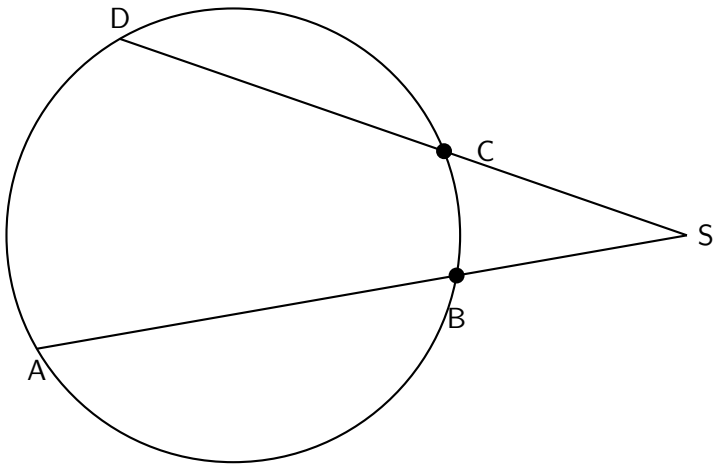

Abbildung 2.10: Sekanten - Satz

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 63.

[3]Gerade, die eine Kurve, besonders einen Kreis, schneidet

2.11 8-eck Verhältnis

In einem regelmäßigen 8-eck sind 2 weitere 8-ecke eingeschlossen wie auf der Skizze dargestellt.

Frage:
Wie ist das Verhältnis der Seiten zwischen dem großen und dem kleinen 8-eck?

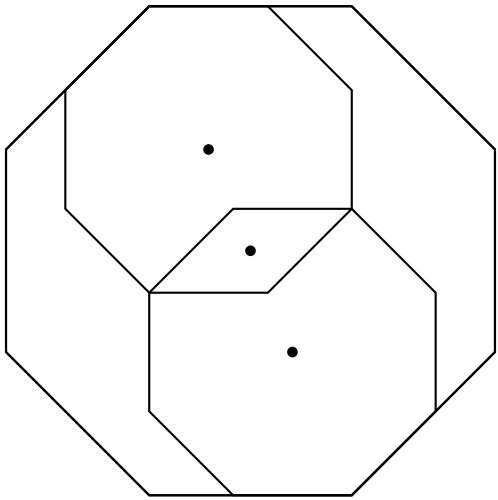

Abbildung 2.11: 8-eck Verhältnis

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 64.

2.12 8 Halbkreise im Quadrat

In einem Quadrat sind 8 Halbkreise an den Seiten des Quadrats wie in der Zeichnung angeordnet.

Frage:
Wie groß ist die schraffierte Fläche, wenn die Kantenlänge des Quadrats 2 ist?

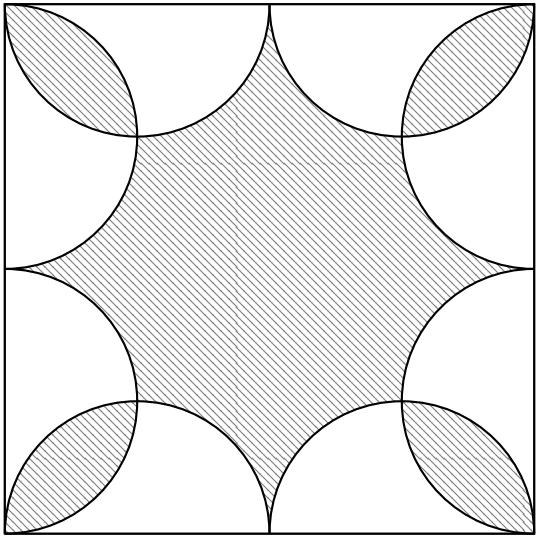

Abbildung 2.12: 8 Halbkreise im Quadrat

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 65.

2.13 8-eck Schleife

Gegeben sei eine Kurve, welche sich um 8 Kreise mit gleichem Radius r schmiegt. Die Mittelpunkte der Kreise liegen auf den Ecken eines regelmäßigen 8-ecks.

Frage:
Gesucht ist die Fläche und der Umfang des Gebildes in Abhängigkeit von r?

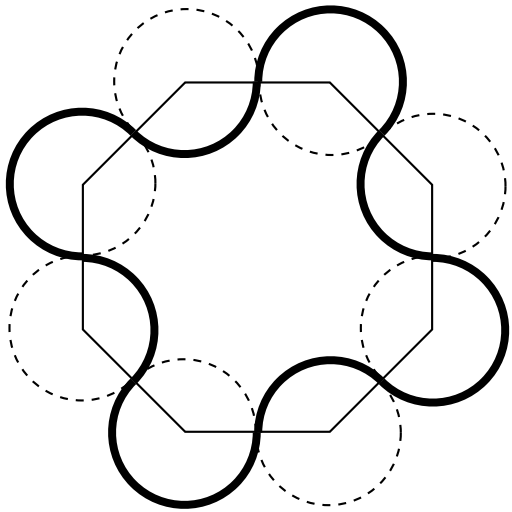

Abbildung 2.13: 8-eck Schleife

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 66.

2.14 Spitzes Dreieck

Gegeben sei eine Rechteck, ein Quadrat und ein Halbkreis. Der Durchmesser des Halbkreises entspricht der langen Seite des Rechtecks. Die kurze Seite a des Rechtecks entspricht der Seite des Quadrats. Der Schnittpunkt vom Quadrat mit dem Halbkreis wird verlängert und bildet mit der Diagonale des Rechtecks ein spitzes Dreieck.

Frage:
Gesucht ist die Fläche und des spitzen Dreiecks.

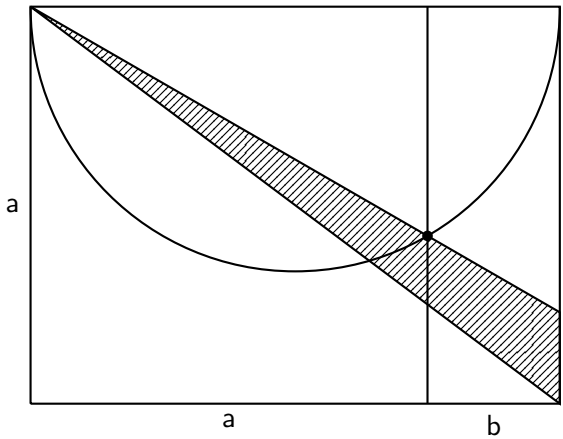

Abbildung 2.14: Spitzes Dreieck

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 68.

2.15 Zerteiltes Dreieck

Gegeben sei eine beliebiges Dreieck, welches durch 2 sich schneidende Linien die 4 Flächen $A_1 = 5$, $A_2 = 15$, $A_3 = 15$, A_4 bildet.

Frage:
Wie groß ist die Fläche A_4.

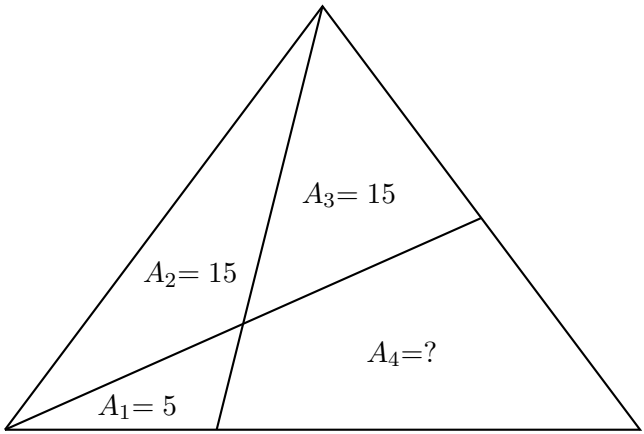

Abbildung 2.15: Zerteiltes Dreieck

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 70.

2.16 Kreis mit 3 Sehnen

Gegeben sei ein Kreis mit 2 Sehnen[4] $a = 10, b = 12$,welche sich auf dem Kreis im Punkt C schneiden. Eine weitere Sehne c schneidet ebenfalls den Punkt C. Dabei gilt der Winkel zwischen den Sehnen a und c sei $\alpha = 30°$ und ebenso der Winkel zwischen den Sehnen c und b sei $\alpha = 30°$.

Frage:
Wie lang ist die mittlere Sehne c?

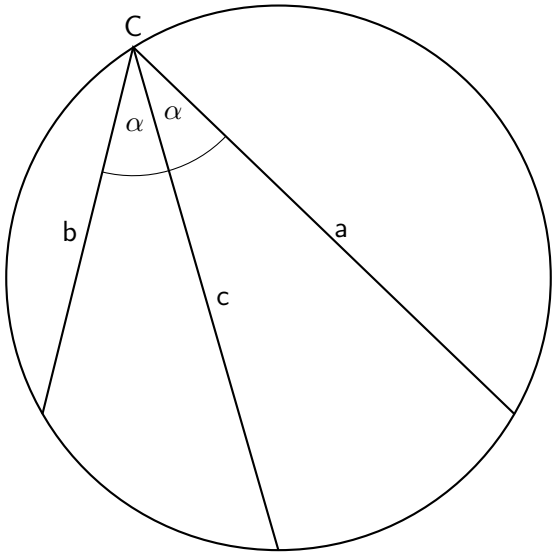

Abbildung 2.16: Kreis mit 3 Sehnen

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 72.

[4]Eine Sehne einer ebenen Kurve ist eine Verbindungsstrecke zweier Punkte auf der Kurve.

2.17 2 Halbkreise mit Kreis

Gegeben sind 2 Halbkreise mit dem Verhältnis der Radien $\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$ und Radius $R = 18$.

Frage:
Wie groß ist der Radius x des eingeeschlossenen Kreises?

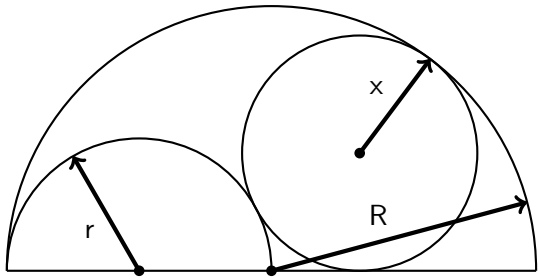

Abbildung 2.17: 2 Halbkreise mit Kreis

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 74.

2.18 2 Halbkreise mit Kreis II

Gegeben sind 2 Halbkreise mit dem Verhältnis der Radien $\frac{r}{R} = \frac{2}{3}$ und Radius $R = 18$.

Frage:
Wie groß ist der Radius x des eingeeschlossenen Kreises?

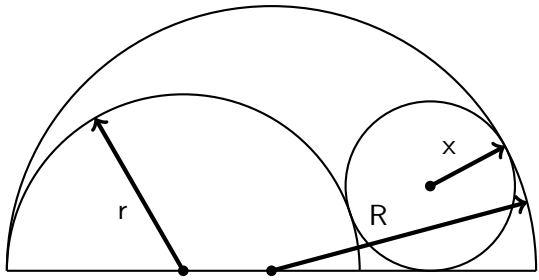

Abbildung 2.18: 2 Halbkreise mit Kreis II

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 76.

2.19 2 Tangenten

Gegeben sind 2 Kreise mit den Tangenten $\overline{CF} = 16$ und $\overline{DG} = 14$.

Frage:
Wie groß ist der Abstand $\overline{AB}$ der Kreismittelpunkte?

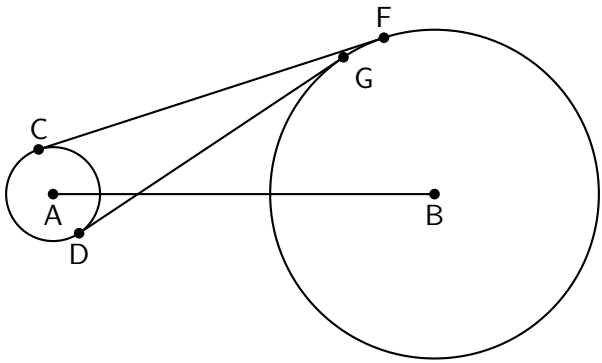

Abbildung 2.19: 2 Tangenten

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 78.

2.20 Rechteck mit Kreis

Gegeben sei ein Rechteck mit einer Diagonale. Ein maximal großer Kreis liegt unterhalb der Diagonale. Eine weitere Linie verläuft parallel zur Grundseite durch den Mittelpunkt. Diese hat Abschnitte der Länge $r, 2, 4$.

Frage:
Wie groß ist die Fläche des Rechteckse?

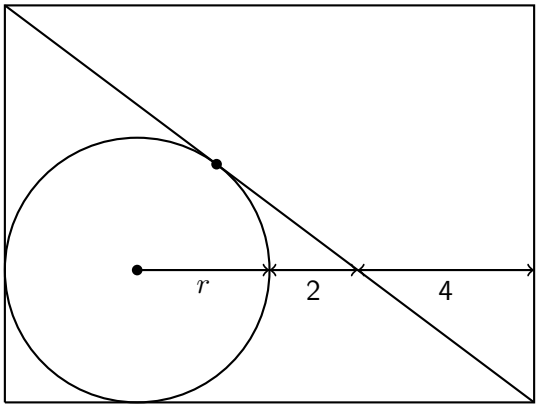

Abbildung 2.20: Rechteck mit Kreis

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 79.

2.21 Rechteck mit Halbkreis

Gegeben sei ein Rechteck mit einer Diagonale. Ein Halbkreis liegt unterhalb der Diagonale. Die Diagonale ist auch die Tangente zum Halbkreis und hat den Berührpunkt S. Der Berührpunkt teilt die Diagonale im Verhältnis 1:2. Die kürzere Seite des Rechtecks ist 6 lang.

Frage:
Wie groß ist der Radius r des Halbkreises?

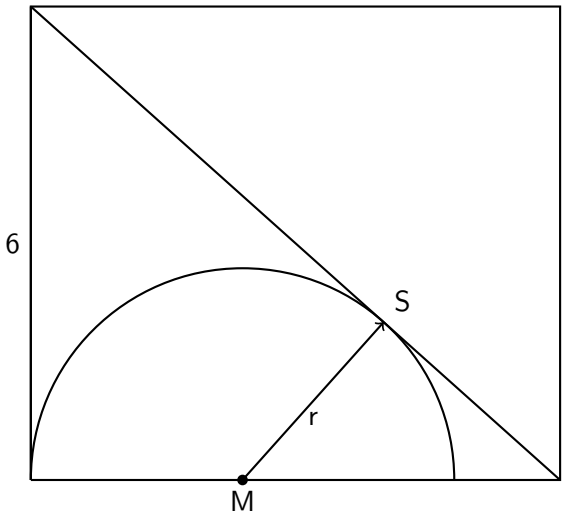

Abbildung 2.21: Rechteck mit Halbkreis

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 81.

2.22 Leiter

Eine 10m lange Leiter wird an einer senkrechten Wand angelehnt. Am Bodem liegt ein Würfel mit 1m Kantenlänge, welche die Leiter beührt.

Frage:
Wie weit ist der Mindest-Abstand Wand zur Leiter, beziehungsweise in welcher maximalen Höhe lehnt die Leiter an der Wand?

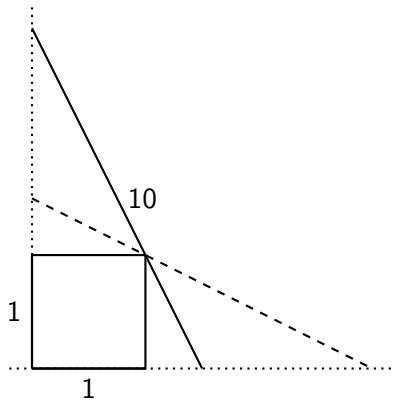

Abbildung 2.22: Leiter

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 83.

2.23 Winkel im Dreieck

Ein rechtwinkliges Dreieck hat 2 gleich große Quadrate über der Hypothenuse. Eine Strecke verbindet den Punkt D mit dem Punkt B.

Frage:
Wie groß ist der Winkel β?

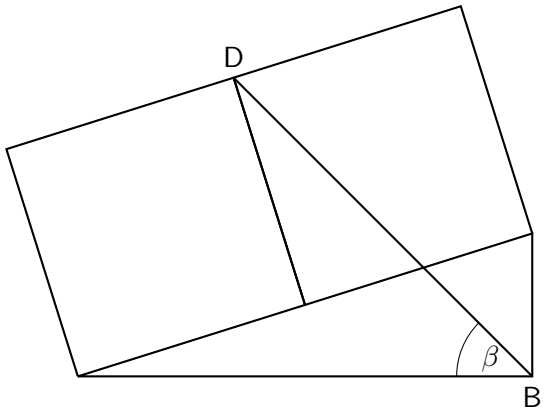

Abbildung 2.23: Winkel im Dreieck

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 85.

2.24 Dreiecke im Quadrat

Gegeben ist ein Quadrat mit seinen Diagonalen. Es werden Winkelhalbierende in A und B eingezeichnet.

Frage:

Wie ist das Verhältnis von $\triangle ABF$ zu $\triangle ACE$?

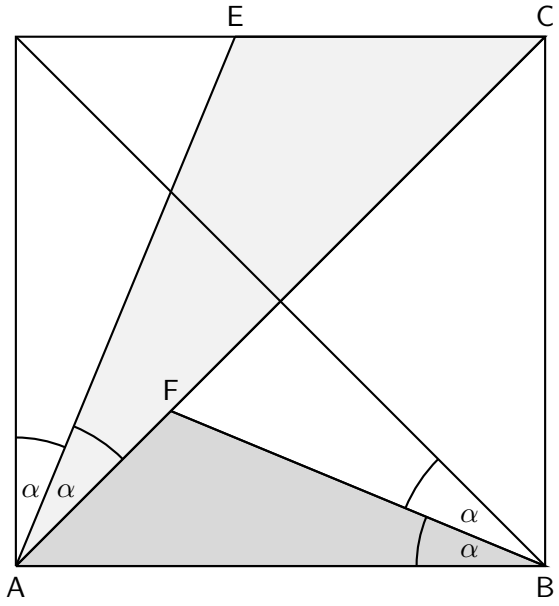

Abbildung 2.24: Dreiecke im Quadrat

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 87.

2.25 2 Kreise im Rechteck

Gegeben ist ein Quadrat. Ein großer Kreis liegt an 3 Seiten des Rechtecks an. Ein kleiner Kreis berührt den goßen Kreis und liegt an 2 Seiten des Rechtecks an.

Frage:

Welchen Radius hat der kleine Kreis, wenn das Rechteck 16 * 18 groß ist.

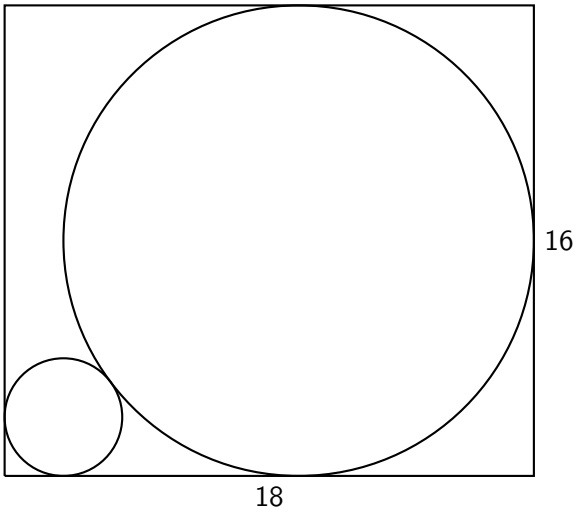

Abbildung 2.25: 2 Kreise im Rechteck

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 88.

2.26 2 Kreise mit Dreieck

In einem Kreis ist ein rechtwinkliges Dreieck und ein kleiner Kreis eingezeichnet.
Alle 3 Ecken des Dreiecks berühren den großen Kreis.
Der kleine Kreis berührt den großen Kreis und die beiden Katheten des Dreiecks.

Frage:
Welchen Radius hat der kleine Kreis, wenn die Katheten 4 und 2 LE groß sind.

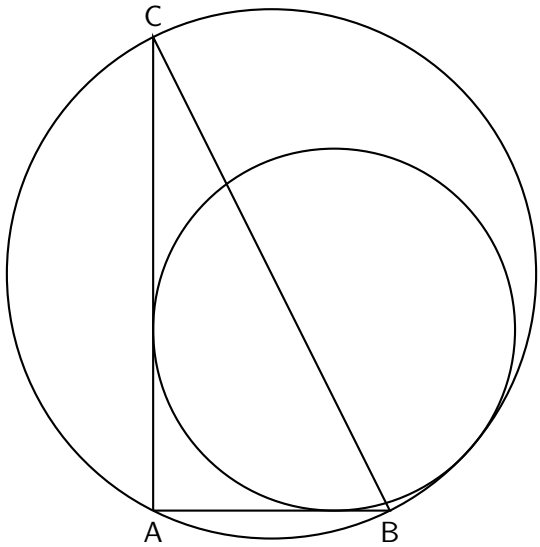

Abbildung 2.26: 2 Kreise mit Dreieck

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 90.

2.27 Kreis und Halbkreis

In einem Quadrat mit der Seitenlänge R sind 2 Viertelkreise mit Radius R, ein Halbkreis mit Radius $\frac{R}{2}$ und ein Kreis mit Radius r eingezeichnet.

Frage:
Welchen Radius r hat der kleine Kreis?

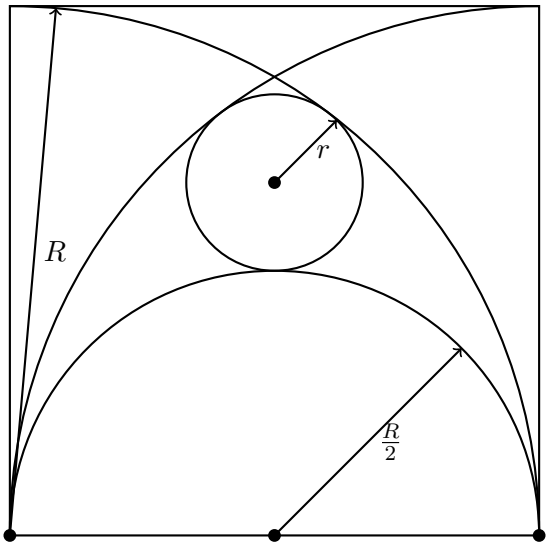

Abbildung 2.27: Kreis und Halbkreis

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 92.

2.28 Verhältnisse im 9-eck

In einem regelmäßigen Polygon mit 9 Ecken sollen die Strecken $a + b$ mit c verglichen werden.

Frage:
Welches Verhältnis entsteht hierbei?

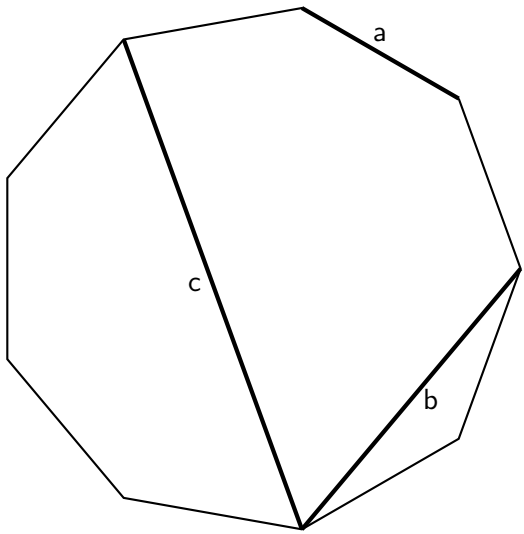

Abbildung 2.28: Verhältnisse im 9-eck

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 93.

2.29 Stern und 8-eck

Gegeben sind 2 Rauten[5], welche rechtwinklg zu einander verdreht sind und einen gemeinsamen Mittelpunkt haben. Damit entsteht ein Stern. Die Schnittfläche bildet ein Polygon mit 8 Ecken.

Frage:
Welches Verhältnis entsteht zwischen den Flächen?

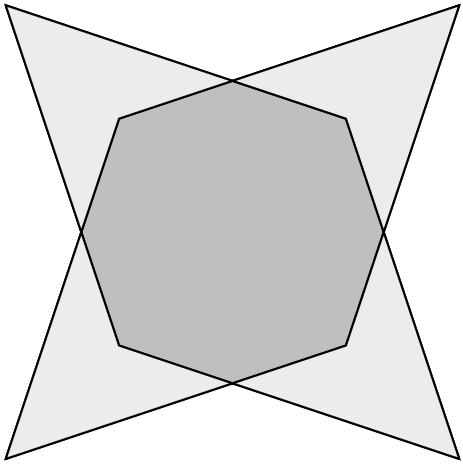

Abbildung 2.29: Stern und 8-eck

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 95.

[5]Ein Viereck mit 4 gleich langen Seiten und jeweils parallelen gegenüberliegende Seiten

2.30 2 Quadrate

Gegeben sind 2 aneinander liegende Quadrate. Eine Gerade unterteilt die gemeinsame Seite in zwei Teile. Daraus können nun 2 schraffierte Dreiecke A_1 und A_2 gebildet werden, welche gleich groß sein sollen.

Frage:
In welchem Verhältnis stehen die Quadrate zueinander?

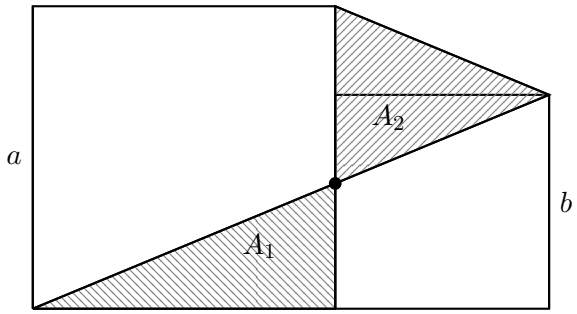

Abbildung 2.30: 2 Quadrate

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 96.

2.31 3 Viertelkreise im Rechteck

Gegeben sei ein Rechteck. Darin sind 3 Viertelkreise so eingepasst, dass ihr Mittelpunkt in den Ecken liegt und sie sich berühren. Der kleinste Viertelkreis hat den Radius 1.

Frage:
Wie groß ist die Fläche des Rechtecks?

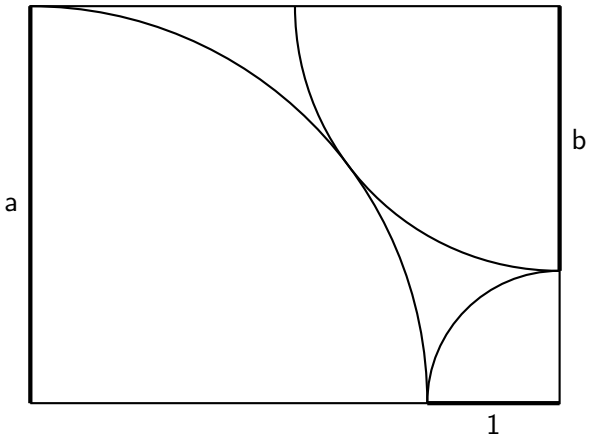

Abbildung 2.31: 3 Viertelkreise im Rechteck

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 97.

2.32 4 Vierecke im Rechteck

Der Punkt P wurde mit den Mittelpunkten der 4 Seiten eines Rechtecks verbunden. Damit entstehen die 4 Vierecke $A_0 = 16cm^2$, $A_1 = 19cm^2$, $A_2 = 11cm^2$ und A_3.

Frage:
Wie groß ist die Fläche von A_3?

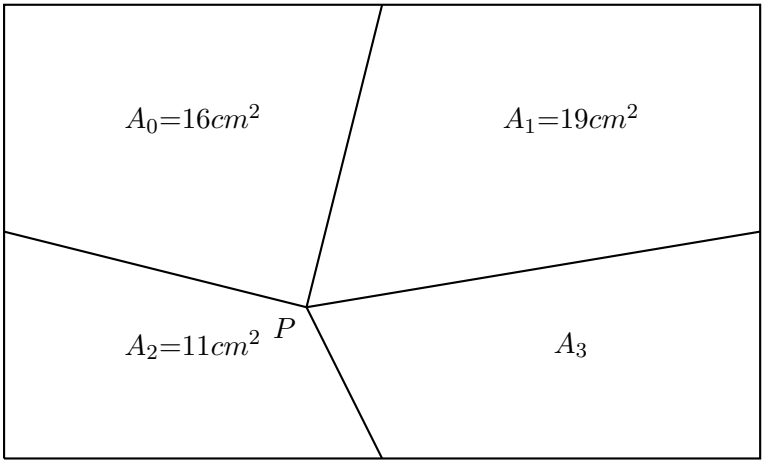

Abbildung 2.32: 4 Vierecke im Rechteck

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 98.

2.33 4 Quadrate

Das kleine Quadrat hat eine Seitenlänge von 1. Die Quadrate sind an ihren Ecken wir dargestellt untereinander verbunden.

Frage:
Wie groß ist die Fläche des obersten Quadrats?

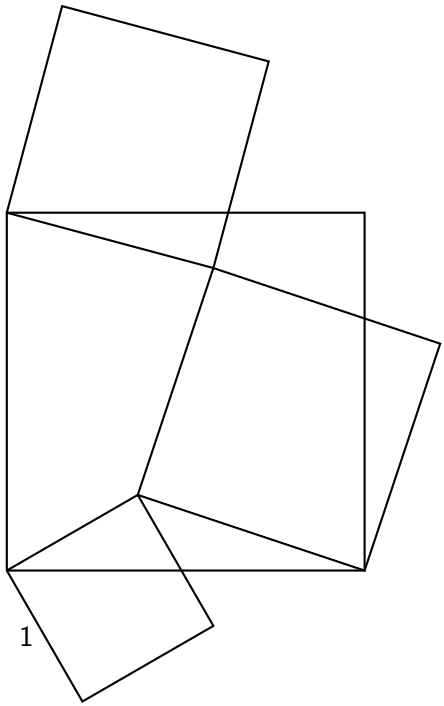

Abbildung 2.33: 4 Quadrate

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 100.

2.34 5 Rechtecke

In einem Quadrat sind 5 gleich große Rechtecke untergebracht. Nur von A_1 ist eine Seite = 4 bekannt.

Frage:
Wie groß ist das Quadrat?

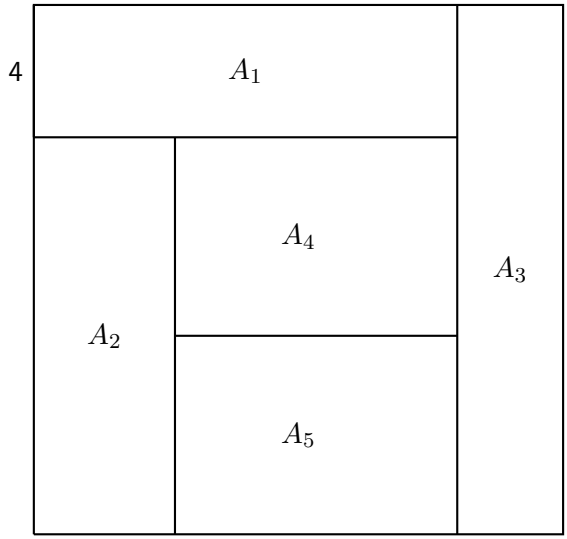

Abbildung 2.34: 5 Rechtecke

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 102.

2.35 3 Kreise

2 Kreise mit Radius $r1 = 4$ und $r2 = 2$ berühren sich.

Frage:
Welchen Radius r_3 hat der kleine Kreis?

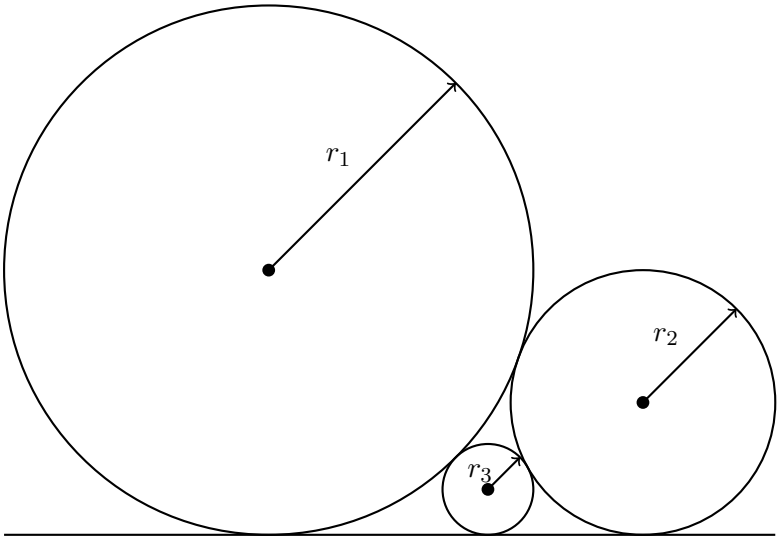

Abbildung 2.35: 3 Kreise

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 103.

2.36 Viertel- Halb- Kreis

In einem Quadrat mit der Seitenlänge $2R$ sind 2 Viertelkreise mit Radius $2R$, ein Halbkreis mit Radius R und ein Kreis mir Radius r wie in der Zeichnung dargestellt eingezeichnet.

Frage:
Welchen Radius r hat der kleine Kreis?

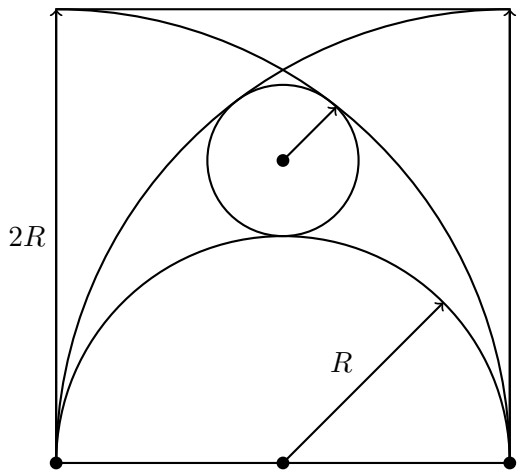

Abbildung 2.36: Viertel- Halb- Kreis

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 104.

2.37 3 Kreise im Quadrat

In einem Quadrat mit der Seitenlänge $a = 10$ sind 3 gleich große Kreise mit dem Radius r passend eingefügt. Dabei berühren sich die 3 Kreise an 3 Punkten und das Quadrat an 4 weiteren Punkten.

Frage:
Welchen Radius r haben die Kreise?

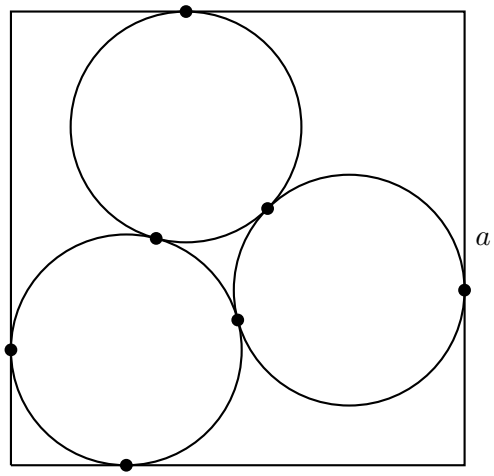

Abbildung 2.37: 3 Kreise im Quadrat

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 105.

2.38 3 Kreise

Gegeben sind 3 konzentrische Kreise und 3 Tangenten. Bekannt sind die Längen von 2 Tangenten mit 20 bzw. 21 LE.

Frage:
Wie lange ist die 3. Tangente x?

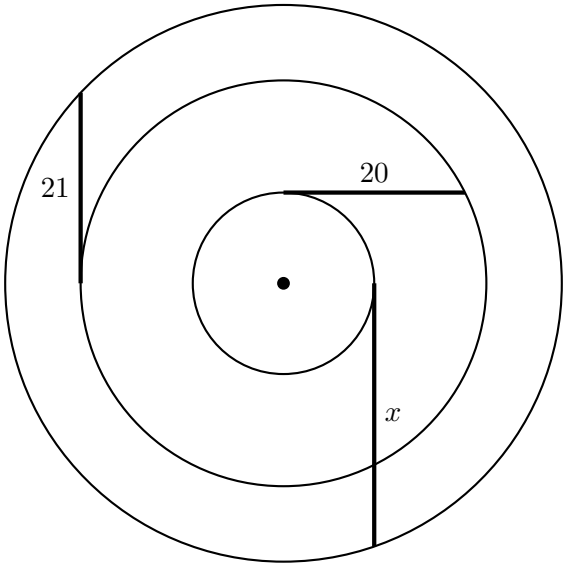

Abbildung 2.38: 3 Kreise

Lösung:
Diese befindet sich auf Seite 106.

Kapitel 3

Lösungen

3.1 Lösung: Flächen Relation

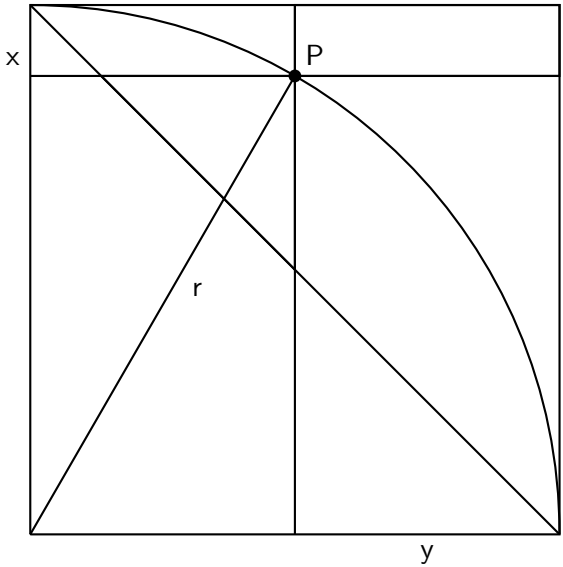

Abbildung 3.1: Lösung Flächen Relation

Es gilt der Satz des Pythagoras:

$$r^2 = (r - x)^2 + (r - y)^2$$

ausmultipliziert und zusammen gefasst:

$$\begin{aligned} r^2 &= r^2 - 2rx + x^2 + r^2 - 2ry + y^2 \\ 0 &= r^2 - 2r(x + y) + x^2 + y^2 \end{aligned}$$

quadratisch ergänzt mit $-2xy$:

$$\begin{aligned} 0 &= (r - (x + y))^2 - 2xy \\ xy &= \frac{(r - (x + y))^2}{2} \end{aligned}$$

Damit steht links die Fläche des Rechtecks und rechts die Fläche des Dreiecks.

3.2 Lösung: Viertelkreis - Kreis

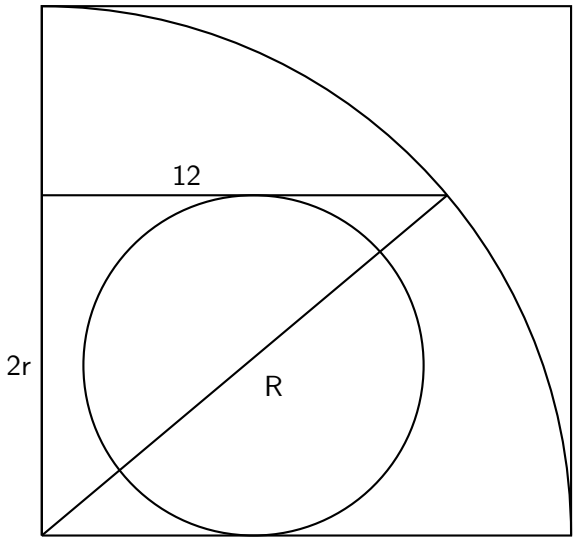

Abbildung 3.2: Lösung Viertelkreis - Kreis

Es gilt der Satz des Pythagoras:

$$R^2 = (2r)^2 + 12^2$$

und die gesuchte Fläche A ist:

$$A = \frac{1}{4}\pi R^2 - \pi r^2$$
$$A = \pi(\frac{R^2}{4} - r^2)$$

und nun R^2 eingesetzt:

$$A = \pi(\frac{((2r)^2 + 12^2)}{4} - r^2)$$
$$A = 36\pi$$

3.3 Lösung: Erweiterung Viertelkreis - Kreis

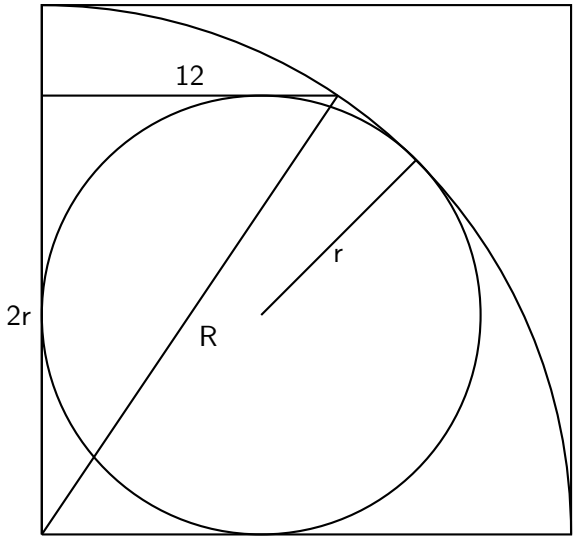

Abbildung 3.3: Lösung Erweiterung Viertelkreis - Kreis

Wenn der Innenkreis die max. Größe hat gilt für R:

$$R = r(1 + \sqrt{2})$$
$$R^2 = (2r)^2 + 12^2$$

und mit R ersetzt:

$$r^2(1 + \sqrt{2})^2 = (2r)^2 + 12^2$$
$$r^2(1 + 2\sqrt{2} + 2 = 4r^2 + 12^2$$
$$(1 + 2\sqrt{2} + 2 = 4 + \frac{12^2}{r^2}$$
$$2\sqrt{2} - 1 = \frac{12^2}{r^2}$$

und nach r aufgelöst:

$$r = \frac{12}{\sqrt{2\sqrt{2}-1}} \approx 8,87..$$

3.4 Lösung: Halbkreis - Dreieck

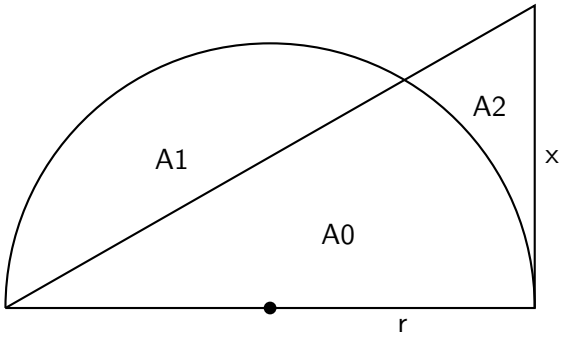

Abbildung 3.4: Lösung Halbkreis - Dreieck

Es werden die drei Flächen $A0, A1, A2$ beschriftet und folgende Beziehung aufgestellt:

$$A0 + A1 = A0 + A2 + 47$$

und die Flächen $A1, A2$ bestimmt:

$$\begin{aligned} A1 &= \frac{\pi}{2}r^2 - A0 \\ A2 &= rx - A0 \end{aligned}$$

und nun $A1, A2$ eingesetzt:

$$\begin{aligned} \cancel{A0} + \frac{\pi}{2}r^2 - \cancel{A0} &= \cancel{A0} + rx - \cancel{A0} + 47 \\ \frac{\pi}{2}r^2 - 47 &= rx \\ x &= \frac{\frac{\pi}{2}r^2 - 47}{r} \\ x &= \frac{\pi}{2}r - \frac{47}{r} \end{aligned}$$

3.5 Lösung: Kreis Sichel

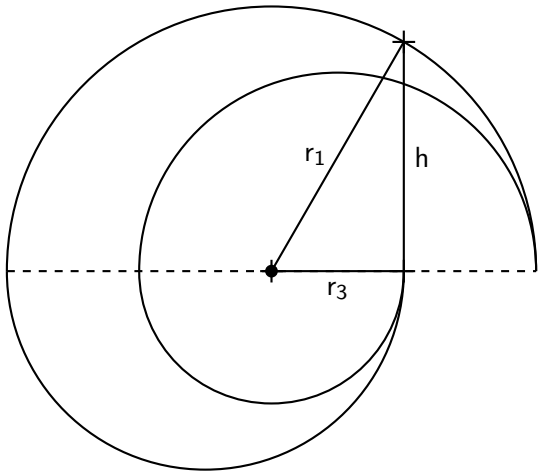

Abbildung 3.5: Lösung Kreis Sichel

Es gilt mit dem Satz von Pythagoras für r_1, h, r_3:

$$r_1{}^2 = h^2 + r_3{}^2$$

und für die Halbkreis-Flächen:

$$A_1 = \frac{\pi}{2} r_1{}^2$$
$$A_2 = \frac{\pi}{2} r_2{}^2$$
$$A_3 = \frac{\pi}{2} r_3{}^2$$

und damit:

$$A = A_1 - \cancel{A_2} + \cancel{A_2} - A_3$$
$$A = \frac{\pi}{2}(r_1{}^2 - r_3{}^2)$$
$$A = \frac{\pi}{2} h^2$$
$$A = \pi$$

3.6 Lösung: Tangenten - Verhältnis

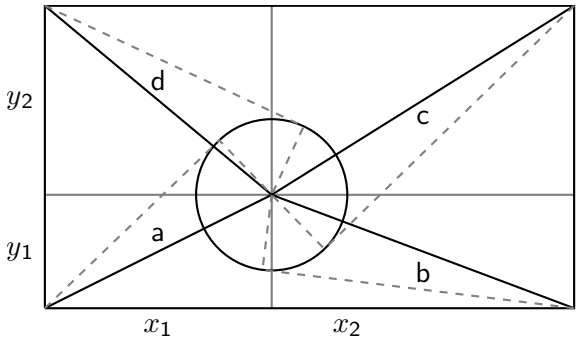

Abbildung 3.6: Lösung Tangenten - Verhältnis

Anstelle der Tangenten $t1..t4$ werden nun die Strecken a, b, c, d zum Kreismittelpunkt $M(x_1|y_1)$ mit Radius r betrachtet:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= {x_1}^2 + {y_1}^2 \\
b^2 &= {x_2}^2 + {y_1}^2 \\
c^2 &= {x_2}^2 + {y_2}^2 \\
d^2 &= {x_1}^2 + {y_2}^2
\end{aligned}
$$

und daraus Differenzen gebildet:

$$
\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= {x_1}^2 - {x_2}^2 \\
d^2 - c^2 &= {x_1}^2 - {x_2}^2
\end{aligned}
$$

also kann die linke Seite gleich gesetzt werden:

$$
\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= d^2 - c^2 \\
d^2 &= a^2 + c^2 - b^2
\end{aligned}
$$

Für die Tangenten gilt mit dem Pythagoras:

$$
\begin{aligned}
({t_4}^2 + r^2) &= ({t_1}^2 + r^2) + ({t_3}^2 + r^2) - ({t_2}^2 + r^2) \\
t4^2 &= t1^2 + t3^2 - t2^2
\end{aligned}
$$

3.7 Lösung: Drei Kreise

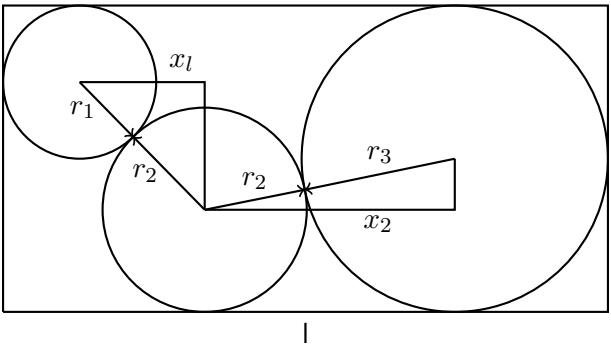

Abbildung 3.7: Lösung Drei Kreise

Die Länge l setzt sich zusammen aus:

$$l = r_1 + x_1 + x_2 + r_3$$

und x_1 und x_2 berechnen sich mit dem Satz vom Pythagoras:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (2 * r_3 - r_1 - r_2)^2} \\ &= \sqrt{24} \\ x_2 &= \sqrt{(r_2 + r_3)^2 - (r_3 - r_2)^2} \\ &= \sqrt{96} \end{aligned}$$

und damit die Länge l:

$$l = 3 + \sqrt{24} + \sqrt{96} + 6 \approx 27,7..$$

3.8 Lösung: Quadrat - Kreis

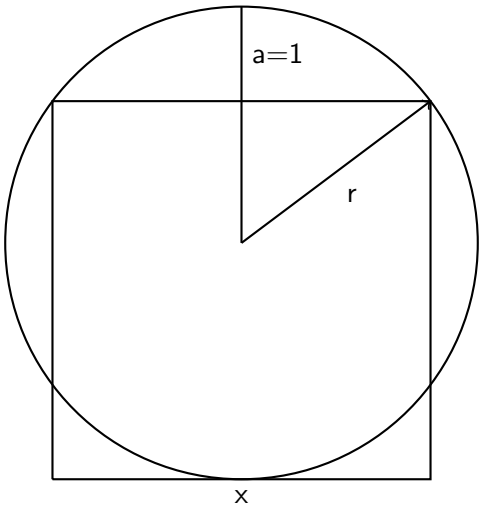

Abbildung 3.8: Lösung Quadrat - Kreis

Im rechtwinkligen Dreieck gilt nach Pythagoras:

$$
\begin{aligned}
r^2 &= (\frac{x}{2})^2 + (r-a)^2 \\
\cancel{r^2} &= \frac{x^2}{4} + \cancel{r^2} - 2ra + a^2 \\
2ra &= \frac{x^2}{4} + a^2
\end{aligned}
$$

und weiter gilt mit $x = 2r - a$ quadriert als x^2 eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
4 * 2ra &= (2r-a)^2 + 4a^2 \\
0 &= 4r^2 - 12ra + 5a^2 \\
r_{12} &= \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 * 4 * 5a^2}}{2 * 4}
\end{aligned}
$$

für $a = 1$ ergibt sich: $r_{12} = 0.5|2.5$ und $x_{12} = 0|4$. Wobei die Lösung mit x=0 das Quadrat zum Punkt minimiert und damit nur $x = 4$ als sinnvolle Lösung in Betracht kommt.

3.9 Lösung: Sehnen Satz

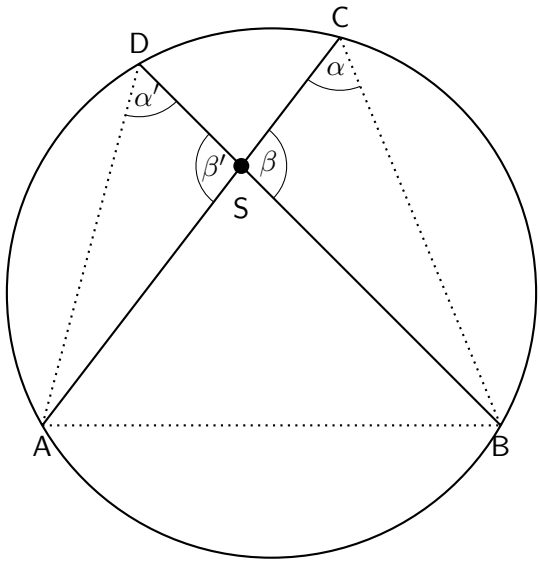

Abbildung 3.9: Lösung Sehnen Satz

Mit dem Umfangwinel-Satz[6] über der Sehne $\overline{AB}$ gilt:

$$\alpha' = \alpha$$
$$\beta' = \beta.$$

Also sind alle 3 Winkel der Dreiecke gleich und diese zueinander ähnlich:

$$\triangle ASD \sim \triangle BSC$$

und damit besagt der Strahlensatz:

$$\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SD}}{\overline{SC}}$$

[6] Alle Umfangswinkel über derselben Sehne eines Kreises sind gleich groß.

3.10 Lösung: Sekanten - Satz

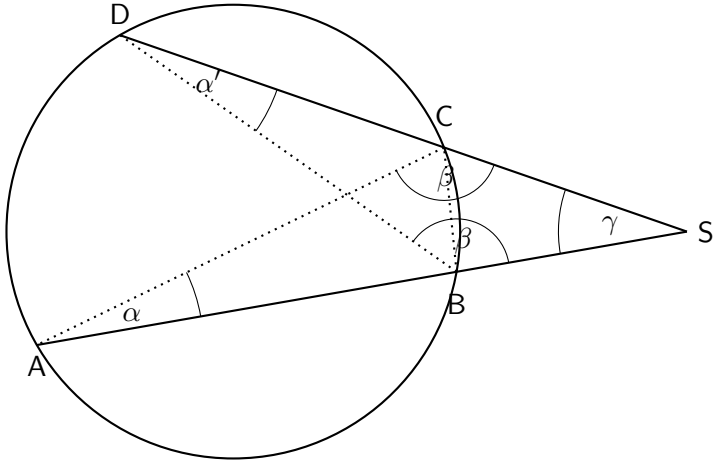

Abbildung 3.10: Lösung Sekanten - Satz

Mit dem Umfangwinel-Satz über der Sehne $\overline{BC}$ gilt:

$$\alpha' = \alpha$$
$$\beta' = \beta$$

Also liegen ähnliche[7] Dreiecke vor:

$$\triangle ASC \sim \triangle BSD$$

und damit besagt der Strahlensatz:

$$\frac{\overline{SD}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{SC}}$$

[7]Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in zwei (und somit in allen drei) Winkeln übereinstimmen

3.11 Lösung: 8-eck Verhältnis

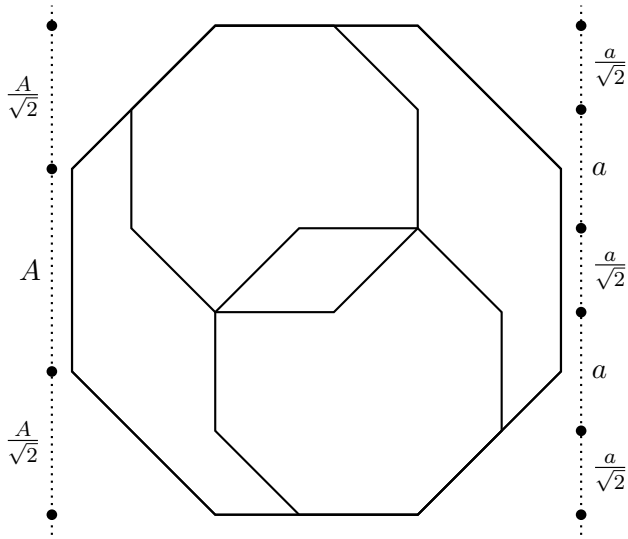

Abbildung 3.11: Lösung 8-eck Verhältnis

Es sei A die Kantenlänge des großen 8-ecks und a die Kantenlänge der kleineren 8-ecke. Nun kann man die Höhe des Gebildes aufstellen:

$$A + 2 * \frac{A}{\sqrt{2}} = 2 * a + 3 * \frac{a}{\sqrt{2}}$$

und umgeformt:

$$\begin{aligned} A * (1 + \frac{2}{\sqrt{2}}) &= a * (2 + \frac{3}{\sqrt{2}}) \\ a &= \frac{2 + \sqrt{2}}{3 + 2 * \sqrt{2}} A \\ a &\approx 0.587A \end{aligned}$$

3.12 Lösung: 8 Halbkreise im Quadrat

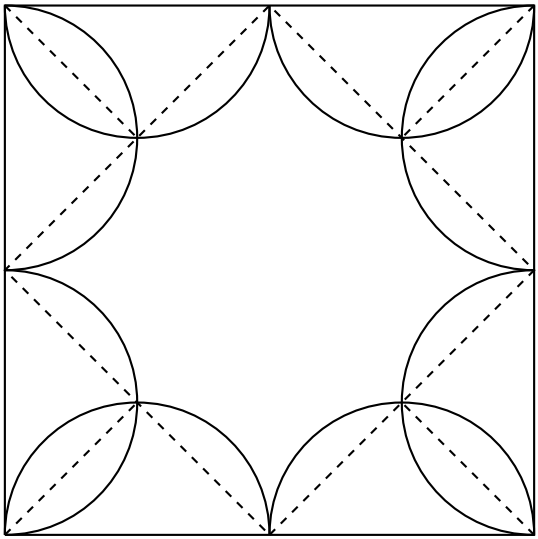

Abbildung 3.12: Lösung 8 Halbkreise im Quadrat

Diese Aufgabe kann ohne Rechnung gelöst werden.
Zeichnet man die gestrichelten Linien geschickt ein, so erkennt man, dass die Kreisabschnitte nach innen verschoben werden können. Damit entsteht ein um 45° gedrehtes Quadrat mit der halben Größe des äußeren Quadrates.

3.13 Lösung: 8-eck Schleife

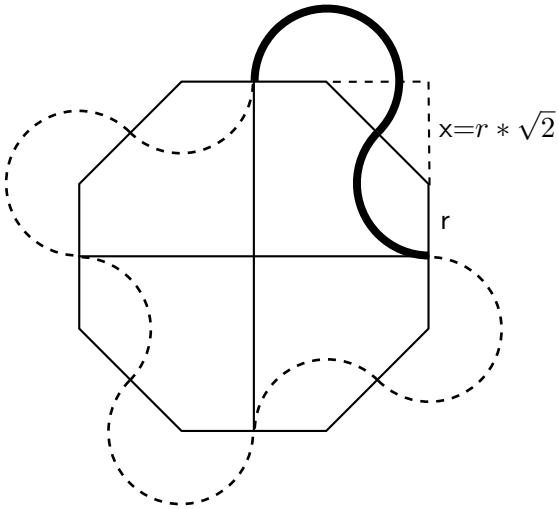

Abbildung 3.13: Lösung 8-eck Schleife

Wir betrachten aus Symmetrie Gründen znächst nur 1/4 des Objektes. Hierbei erkennt man, dass sich stets 2 Bogenteile zum Kreis ergänzen lassen. Also ist

$$U = 4 * 2\pi * r$$

Die Fläche A des Objektes ist die
Fläche des 8Ecks $A_8 + 4$ Ausstülpungen - 4 Einbuchtungen:

$$A = A_8 + 4(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}) * \pi * r^2$$

Die Fläche des 8Ecks kann ebenfalls mit dem abgeschnittenen Quadrat mal 4 bestimmt werden:

$$\begin{aligned} A_8 &= 4 * ((r + x)^2 - 0.5x^2) \\ &= 4 * (r^2 + 2rx + 0.5x^2) \\ &= 4 * (2r^2 + 2r^2\sqrt{2}) \\ &= 8r^2 * (1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Und damit ist die Fläche des Objektes bestimmt:

$$A = 8r^2 * (1 + \sqrt{2} + \frac{\pi}{6})$$

3.14 Lösung: Spitzes Dreieck

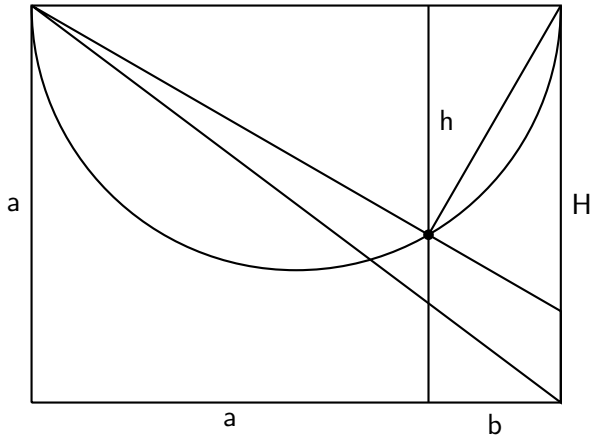

Abbildung 3.14: Lösung Spitzes Dreieck

Mit dem Satz von Thales [8] und dem Höhensatz von Eulid [9] gilt:

$$h^2 = a * b$$

Und mit dem Strahlensatz gilt:

$$\begin{aligned} \frac{H}{a+b} &= \frac{h}{a} \\ H &= \frac{h * (a+b)}{a}) \\ H &= \frac{\sqrt{ab} * (a+b)}{a}) \end{aligned}$$

[8] Von einem Halbkreis umschriebenen Dreiecke sind rechtwinklig.

[9] In einem rechtwinkligen Dreieck teilt die zur Hypotenuse gehörige Höhe h diese in zwei Abschnitte a und b, dabei entspricht die Länge der Höhe h dem geometrischen Mittel von a und b

Die Fläche des spitzen Dreiecks A ist gleich der Differenz der großen - der kleineren Dreicksfläche:

$$A = \frac{1}{2} * (a + b) * (a - H)$$
$$A = \frac{1}{2} * (a + b) * (a - \frac{\sqrt{ab} * (a + b)}{a})$$

3.15 Lösung: Zerteiltes Dreieck

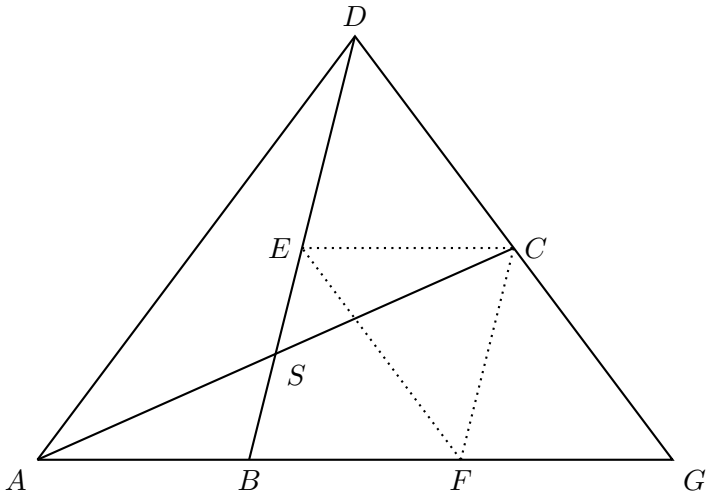

Abbildung 3.15: Lösung Zerteiltes Dreieck

Wir zeichnen 3 Hilfslinien $\overline{EC}$, $\overline{EF}$ und $\overline{FC}$ ein, welche parallel zu dem großen Dreick verlaufen. Dabei gilt

- $\triangle ABS = \triangle SCE$ [10]
- $\overline{BE} = \overline{ED}$ [11]
- $\overline{AS} = \overline{SC}$ [12]
- $\overline{GC} = \overline{CD}$ [13]
- $\triangle BFE = \triangle FCE = \triangle ECD = \triangle FGC$

[10] $\triangle ABS$ wird im Punkt S um 180° gedreht.

[11] Die Flächen $\frac{\triangle ABS}{\triangle ABD} = \frac{1}{4} = \frac{\overline{BS}}{\overline{BD}}$ und $\overline{BS} = \overline{SE}$

[12] Die Flächen $\frac{\triangle SCD}{\triangle ACD} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{SC}}{\overline{AC}}$

[13] Da E die Strecke $\overline{BD}$ halbiert gilt dies auch für $\overline{GD}$.

Damit ist die Fläche $\triangle ECD$ = 15 - 5 Die Fläche des Polygons A_4 = 3 * $\triangle ECD - \triangle ABS$ = 3 * 10 - 5 = 25

3.16 Lösung: Kreis mit 3 Sehnen

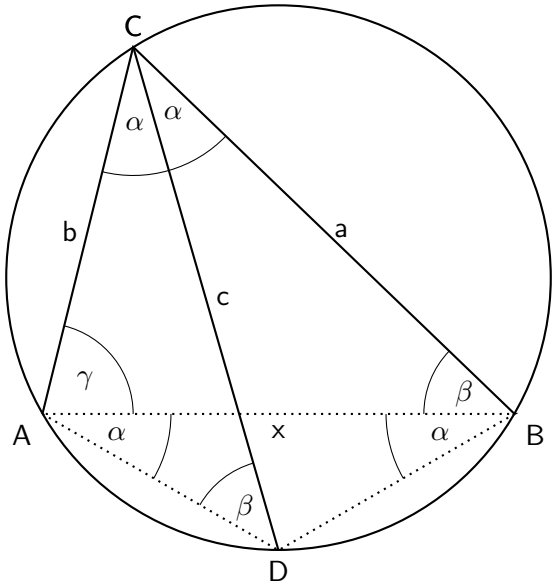

Abbildung 3.16: Lösung Kreis mit 3 Sehnen

Wir zeichnen 3 Hilfslinien $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ und $\overline{DB}$ ein und erkennen, dass über der Sehne $\overline{AD}$ der Winkel[14] α in C auch in B auftaucht. Ähnliches gilt im Punkt A mit der Sehne $\overline{DB}$ und für β im Punkt D mit der Sehne $\overline{AC}$.
Nun gilt:

- $\triangle ABC$: Cosinus Satz: $x^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * cos(2\alpha)$
  $x = 11,1355$
- $\triangle ABC$: Cosinus Satz: $b^2 = a^2 + x^2 - 2 * a * x * cos(\beta)$
  $\beta = 51,05°$
- $\triangle ABC$: Winkelsumme: $180 = \alpha + \alpha + \beta + \gamma$
  $\gamma = 68,95°$

[14] Der Umfangswinkelsatz besagt, dass der Winkel auf dem Kreisbogen gegenüber einer festen Sehne immer gleich groß ist.

- $\triangle ADC$: Sinus Satz: $\frac{c}{sin(\gamma+\alpha)} = \frac{b}{sin(\beta)}$
  $c = 12,7$

3.17 Lösung: 2 Halbkreise mit Kreis

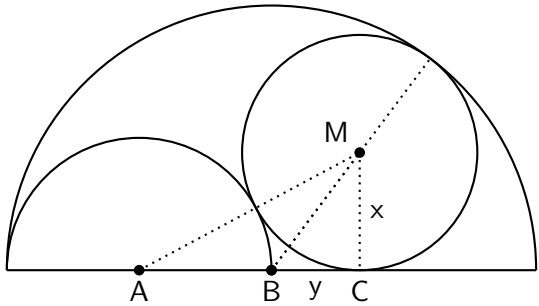

Abbildung 3.17: Lösung 2 Halbkreise mit Kreis

Wir zeichnen 3 Hilfslinien vom Mittelpunkt M aus ein und beschriften diese mit $\overline{CM}$=x, $\overline{AM}$=$r + x$, $\overline{BM}$=$R - x$, $\overline{BC}$=y.

Im $\triangle BCM$ gilt mit dem Satz von Pythagoras:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (R - x)^2 \\ 2Rx &= R^2 - y^2 \end{aligned}$$

Im $\triangle ACM$ gilt mit dem Satz von Pythagoras:

$$\begin{aligned} (r + x)^2 &= x^2 + (r + y)^2 \\ 2rx &= 2ry + y^2 \qquad\qquad | * 2; R = 2r \\ 2Rx &= 2Ry + 2y^2 \end{aligned}$$

Nun setzen wir $2Rx$ gleich:

$$\begin{aligned} R^2 - y^2 &= 2Ry + 2y^2 \\ 0 &= 3y^2 + 2Ry - R^2 \end{aligned}$$

Lösung der gemischt quadratischer Gleichung:

$$y_1 = \frac{R}{3} \qquad x_1 = \frac{8}{18} * R$$
$$(y_2 = -R \qquad x_2 = 0)$$

3.18 Lösung: 2 Halbkreise mit Kreis II

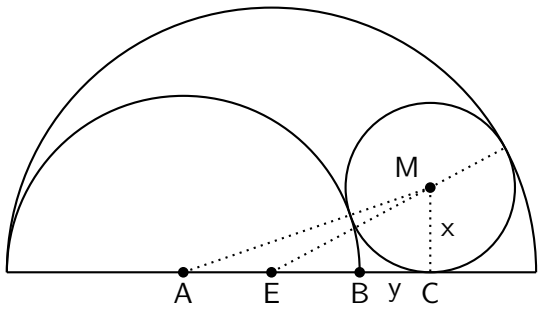

Abbildung 3.18: Lösung 2 Halbkreise mit Kreis II

Wir zeichnen 4 Hilfslinien vom Mittelpunkt M aus ein und beschriften diese mit $\overline{CM}$=x, $\overline{AM}$=$r + x$, $\overline{EM}$=$R - x$, $\overline{EC}$=$2r - R + y$, $\overline{BC}$=y.

Im $\triangle ECM$ gilt mit dem Satz von Pythagoras:

$$\begin{aligned}
(R-x)^2 &= x^2 + (2r - R + y)^2 \\
\cancel{R^2} - 2Rx + \cancel{x^2} &= \cancel{x^2} + 4r^2 - 2Rr + 2ry \\
&\quad - 2Rr + \cancel{(R^2)} - Ry \\
&\quad + 2ry - Ry + y^2 \\
2Rx &= -4r^2 + 4Rr - 4ry + 2Ry - y^2
\end{aligned}$$

Im $\triangle ACM$ gilt mit dem Satz von Pythagoras:

$$\begin{aligned}
(r+x)^2 &= x^2 + (r+y)^2 \\
\cancel{r^2} + 2rx + \cancel{x^2} &= \cancel{x^2} + \cancel{r^2} + 2ry + y^2 \\
x &= \frac{2ry + y^2}{2r}
\end{aligned}$$

Nun setzen wir x ein:

$$2R\frac{2ry+y^2}{2r} = -4r^2+4Rr-4ry+2Ry-y^2$$
$$0 = (1+\frac{R}{r})y^2+(4r-\cancel{2R}+\cancel{2R})y+4r^2-4Rr$$

Lösung der gemischt quadratischen Gleichung:

$$y_{12} = \frac{-4r \pm \sqrt{16r^2-4*(1+\frac{R}{r})(4r^2-4Rr)}}{2(1+\frac{R}{r})}$$
$$y_{12} = \frac{-2r \pm 2\sqrt{\cancel{r^2}-(\cancel{r^2}+\cancel{Rr}-\cancel{Rr}-R^2)}}{1+\frac{R}{r}}$$
$$y_{12} = \frac{-2r \pm 2R}{1+\frac{R}{r}}$$

$$y_1 = 2r\frac{R-r}{R+r}$$
$$y_2 = -2r$$

mit y_1 Wert kann nun x_1 bestimmt werden:

$$x_1 = \frac{\cancel{2r}(2r\frac{R-r}{R+r})+\cancel{2r}2r(\frac{R-r}{R+r})^2}{\cancel{2r}}$$
$$x_1 = \frac{2r*(R^2-\cancel{r^2}+R^2-2Rr+\cancel{r^2})}{(R+r)^2}$$
$$x_1 = \frac{4R^2r-4Rr}{(R+r)^2}$$
$$x_1 = 4Rr\frac{R-r}{(R+r)^2}$$

mit y_2 Wert kann nun x_2 bestimmt werden:

$$x_2 = \frac{2r(-2r)+(-2r)^2}{2r}$$
$$x_2 = 0$$

3.19 Lösung: Lösung 2 Tangenten

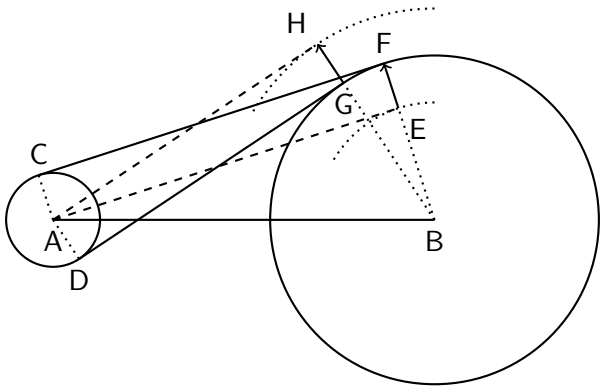

Abbildung 3.19: Lösung 2 Tangenten

Wir definieren
$\overline{AB} = x$, $\overline{AD} = r$, $\overline{BF} = R$, $R = \lambda * r$,
$\overline{CF} = a$, $\overline{DG} = b$ und damit im $\triangle ABE$:

$$x^2 = b^2 + (R-r)^2 = a^2 + (R+r)^2$$
$$b^2 + \cancel{R^2} - 2Rr + \cancel{r^2} = a^2 + \cancel{R^2} + 2v + \cancel{r^2}$$
$$r = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{4\lambda}}$$

und nun r eingesetzt:

$$x = \sqrt{b^2 + (R-r)^2}$$
$$x = \sqrt{b^2 + r^2(\lambda - 1)^2}$$

und für $\lambda = 1$:

$$x = b$$
$$r = \sqrt{15}$$

3.20 Lösung: Rechteck mit Kreis

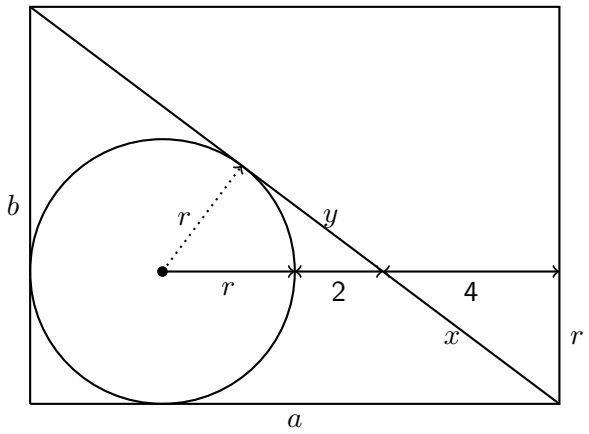

Abbildung 3.20: Lösung Rechteck mit Kreis

Wir sehen identische $\triangle$ und können daher sagen:

$$y = 4$$

Und mit dem Satz vom Pythagoras:

$$\begin{aligned} r^2 + y^2 &= (r+2)^2 \\ \cancel{r^2} + 16 &= \cancel{r^2} + 4r + 4 \\ r &= 3 \end{aligned}$$

Und damit ist auch a=$2r + 2 + 4 = 12$ bekannt

Und es gibt auch noch ähnliche $\triangle$. Daher gilt:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{4}{r} \\ b &= \frac{3}{4}a \\ b &= 9 \end{aligned}$$

Und folglich ist die Fläche des Rechtecks $a * b = 108$.

3.21 Lösung: Rechteck mit Halbkreis

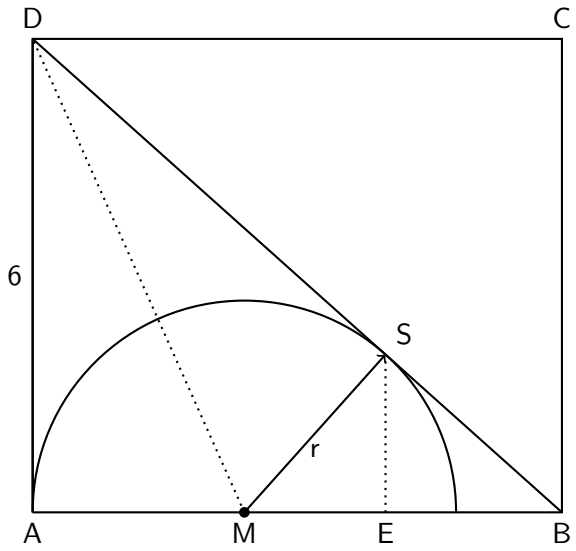

Abbildung 3.21: Lösung Rechteck mit Halbkreis

Wir sehen 2 identische $\triangle AMD$ und $\triangle MSD$ und können daher sagen $\overline{AD} = \overline{SD} = 6$ und damit $\overline{BS} = 3$.
Im $\triangle EBS$ gilt damit:

$$\overline{EB}^2 = \overline{BS}^2 - \overline{ES}^2 = 3^2 - 2^2 = 5$$

Im $\triangle MBS$ gilt der Höhensatz:

$$\overline{ME} = \overline{ES}^2/\overline{EB} = 4/\sqrt{5}$$

Im $\triangle MBS$ gilt der Satz von Pythagoras:

$$
\begin{aligned}
r^2 &= (\overline{ME} + \overline{EB})^2 - \overline{BS}^2 \\
r^2 &= (\frac{4}{\sqrt{5}} + \sqrt{5})^2 - 9 \\
r^2 &= (\frac{4+5}{\sqrt{5}})^2 - 9 = \frac{81}{5} - 9 = \frac{36}{5} \\
r &= \frac{6}{\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

3.22 Lösung: Leiter

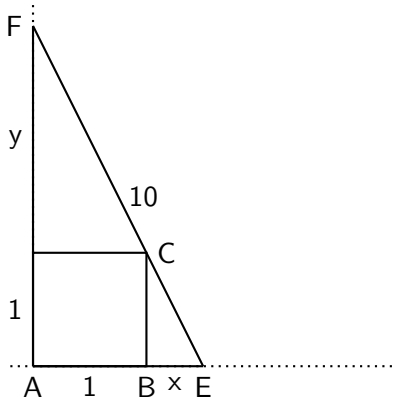

Abbildung 3.22: Lösung Leiter

Da $\triangle BEC$ und $\triangle AEF$ ähnlich sind gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y} &= \frac{1+x}{1+y} \\
\frac{1+y}{y} &= 1+x \\
\frac{1}{y} &= x \\
y &= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Im $\triangle AEF$ gilt der Satz von Pythagoras:

$$\begin{aligned}
100 &= (1+x)^2 + (1+y)^2 \\
100 &= (1+2x+x^2) + (1+\frac{2}{x}+(\frac{1}{x})^2) \\
100 &= x^2 + 2 + (\frac{1}{x})^2 + 2x + \frac{2}{x}
\end{aligned}$$

Sustitution: $z = x + \frac{1}{x}$

$$
\begin{aligned}
z^2 + 2z - 100 &= 0 \\
z_{1/2} &= -1 \pm \sqrt{1 + 100} \\
z_1 &\approx 9,05 \\
z_2 &\approx -11,05
\end{aligned}
$$

[15]

Rücksubstitution:

$$
\begin{aligned}
zx &= x^2 + 1 \\
x^2 - zx + 1 &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{z_1}{2} \pm \sqrt{(\frac{z_1}{2})^2 - 1} \\
x_{3/4} &= \frac{z_2}{2} \pm \sqrt{(\frac{z_2}{2})^2 - 1} \\
x_1 &\approx +0,112 \\
x_2 &\approx +8,938 \\
x_3 &\approx -10,96 \\
x_4 &\approx -0,091
\end{aligned}
$$

Damit sind 2 Lösungen gefunden:

$$
\begin{aligned}
Abstand &\approx 1,112 \qquad & Höhe &\approx 9,938 \\
Abstand &\approx 9,938 \qquad & Höhe &\approx 1,112
\end{aligned}
$$

[15] pq Formel: $x^2 + px + q = 0$ $\qquad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

3.23 Lösung: Winkel im Dreieck

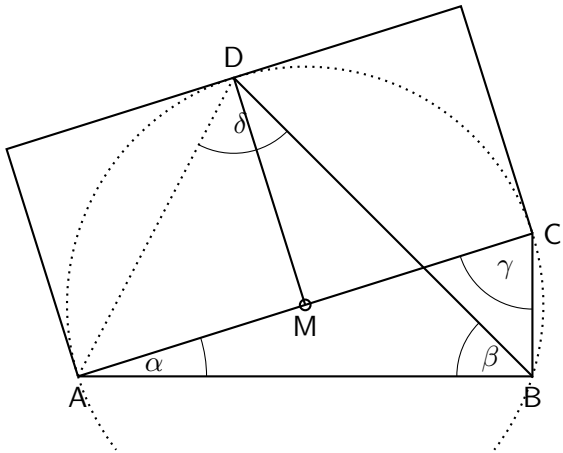

Abbildung 3.23: Lösung Winkel im Dreieck

Wir betrachten die Sehne $\overline{A}C$ und können einen Umreis üer A, B, C, D erstellen, da sowohl im Punkt D als auch in B ein $90°$ Winkel liegt. Nun betrachten wir die Sehne $\overline{A}B$ und stellen mit dem Umfangswinkelsatz [16]fest:

$$\delta = \gamma$$

Im $\triangle ABD$ gilt:

$$180° = \alpha + 45° + \delta + \beta$$

Im $\triangle ABC$ gilt:

$$\begin{aligned} 90° &= \alpha + \gamma \\ 90° - \alpha &= \delta \end{aligned}$$

δ nun eingesetzt:

$$\begin{aligned} 180° &= \alpha + 45° + 90° - \alpha + \beta \\ 45° &= \beta \end{aligned}$$

[16] Alle Umfangswinkel über demselben Kreisbogen sind gleich groß.

3.24 Lösung: Dreiecke im Quadrat

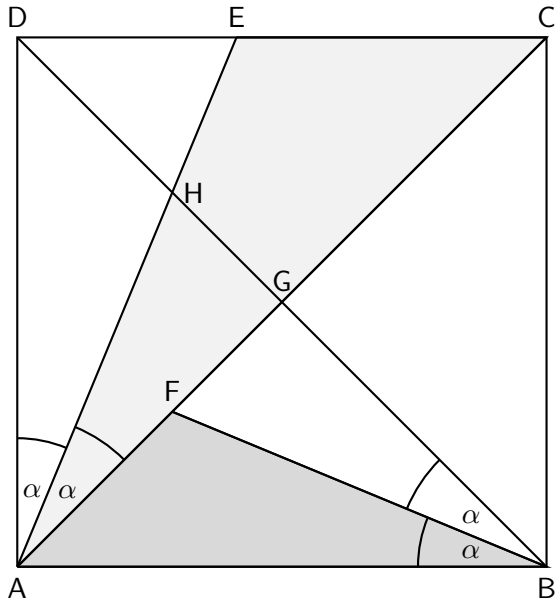

Abbildung 3.24: Lösung Dreiecke im Quadrat

Wir betrachten die Flächen von Dreiecken. Es gilt wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke:

$$\triangle ABF = x\triangle ABG$$
$$\triangle ACE = x\triangle ACD$$

wobei x ein fester Faktor sei. Weiterhin gilt:

$$\triangle ABG = 0.5\triangle ACD$$

und damit

$$\frac{\triangle ABF}{\triangle ACE} = \frac{x0.5\triangle ACD}{x\triangle ACD}$$

$$\frac{\triangle ABF}{\triangle ACE} = 0.5$$

F

3.25 Lösung: 2 Kreise im Rechteck

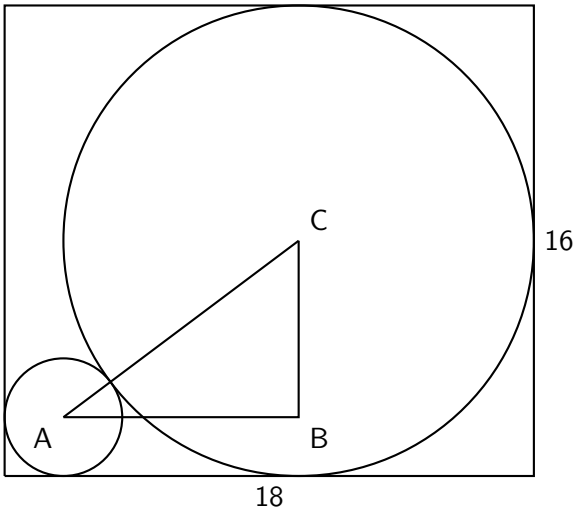

Abbildung 3.25: Lösung 2 Kreise im Rechteck

Wir betrachten den großem Kreis.
Hier ist der Radius $R = 8$.
Der kleine Kreis hat den Radius r.
Nun können wir im rechtwinklige $\triangle ABC$ folgende Längen festlegen:

$$\overline{AC} = r + R$$
$$\overline{BC} = R - r$$
$$\overline{AB} = 18 - r - R$$

Es gilt der Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned}
\overline{AC}^2 &= \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 \\
(r+8)^2 &= (8-r)^2 + (10-r)^2 \\
\cancel{r^2} + 16r + \cancel{64} &= \cancel{64} - 16r + \cancel{r^2} + 100 - 20r + r^2 \\
0 &= r^2 - 52r + 100
\end{aligned}$$

Und damit kann die Löung für $r = 2$ bestimmt werden. Die 2. Lösung $r = 50$ kann ausgeschlossen werden.

3.26 Lösung: 2 Kreise mit Dreieck

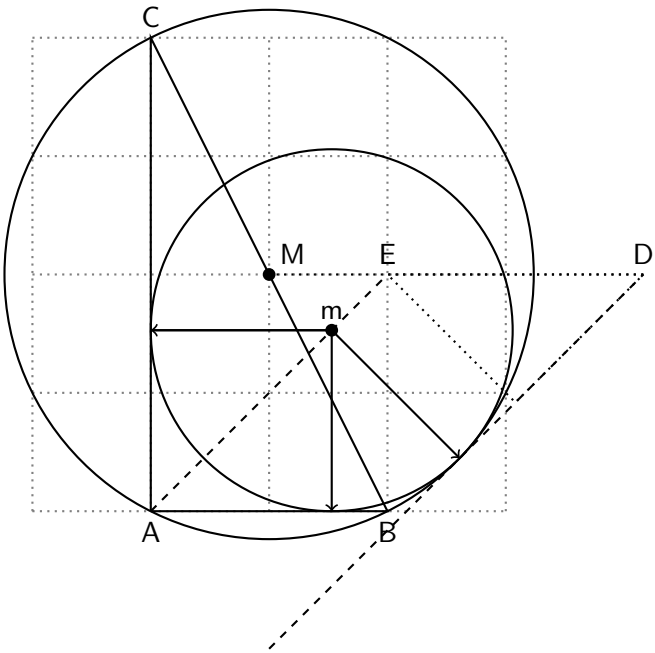

Abbildung 3.26: Lösung Lösung 2 Kreise mit Dreieck

Der Satz des Thales bewirkt, dass $\overline{BC}$ der Durchmesser des großen Kreises sein muß. Damit ist auch der Mittelpunkt $M = (1|2)$ und der Radius $R = \sqrt{5}$ bestimmt.
Der kleine Kreis hat von $\overline{AB}$ den gleichen Abstand wie von $\overline{AC}$. Also muß sein Mittelpunkt auf einer 45° Linie von A ausgehend liegen.
Zeichne nun eine Parallele zur 45° Linie im Abstand R vom Mittelpunkt M. Damit wird $\overline{MD} = R\sqrt{2}$ und der Abstand

der 45° Parallelen zu r:

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{ED} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}R - 1)$$
$$r = \sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$r = 1,52896119631324217200$$

3.27 Lösung: Kreis und Halbkreis

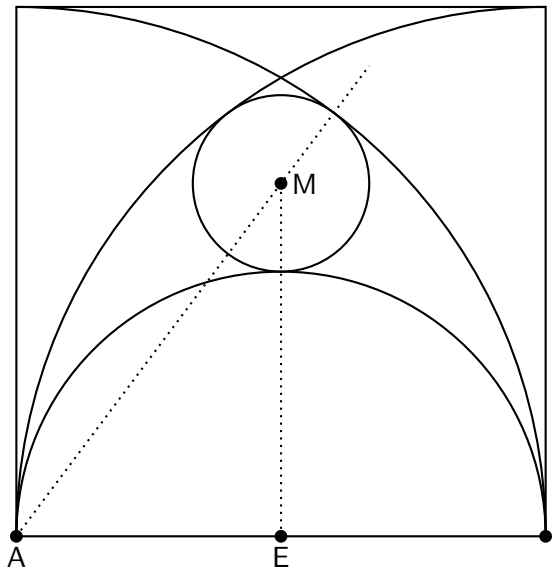

Abbildung 3.27: Lösung Kreis und Halbkreis

Man betrachte das $\triangle AEM$ mit den Seiten

$$\overline{AM} = R - r$$
$$\overline{AE} = R/2$$
$$\overline{EM} = R/2 + r$$

Und mit dem Phytagoras folgt:

$$(R - r)^2 = (R/2)^2 + (R/2 + r)^2$$
$$R^2 - 2rR + \cancel{r^2} = R^2/4 + R^2/4 + rR + \cancel{r^2}$$
$$R^2/2 = 3rR$$

Und mit $R \neq 0$ gilt dann:

$$R = 6r$$
$$r = \frac{1}{6}R$$

3.28 Lösung: Verhältnisse im 9-eck

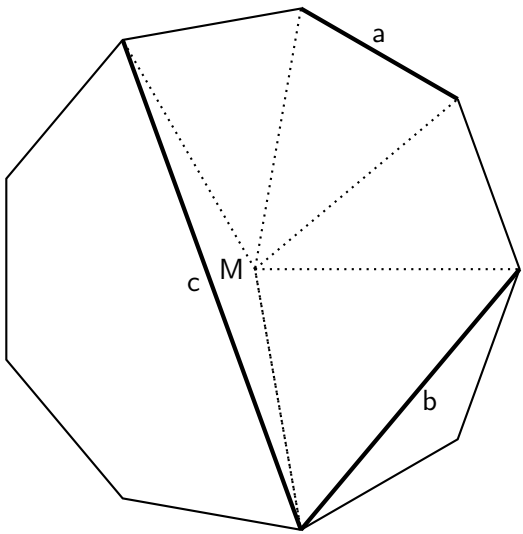

Abbildung 3.28: Lösung Verhältnisse im 9-eck

Man betrachte die Innenwinkel. Diese sind $360°/9 = 40°$. Damit kann für die Dreiecke über den Strecken a, b, c folgendes aufgestellt werden:

$$cos(40°/2) = \frac{a/2}{r}$$
$$cos(2 * 40°/2) = \frac{b/2}{r}$$
$$cos(4 * 40°/2) = \frac{c/2}{r}$$

Und dies aufgelöst nach den Seiten:

$$a = 2 * r * cos(20°)$$
$$b = 2 * r * cos(40°)$$
$$c = 2 * r * cos(80°)$$

Und damit kann das gesuchte Verhältnis gebildet werden:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{cos(20°)}{cos(40°) + cos(80°)}$$
$$\frac{a}{b+c} = 1$$

3.29 Lösung: Stern und 8-eck

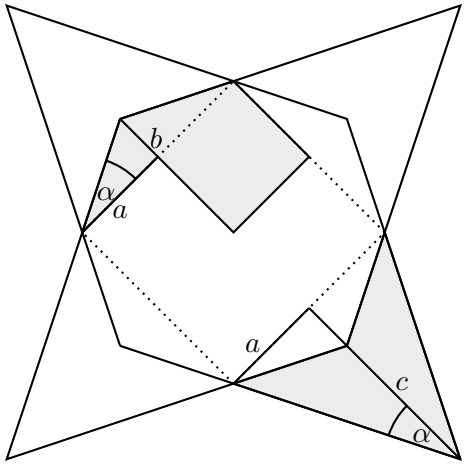

Abbildung 3.29: Lösung Stern und 8-eck

Berechnung des Winkel α:

$$tan(\alpha) = b/a$$
$$tan(\alpha) = a/c$$

Die eingefärbten Flächen A_0, A_1 und A_2 berechnen sich so:

$$A_0 = a * b = a^2 * tan(\alpha)$$
$$A_1 = a^2 + A_0 = a^2(1 + tan(\alpha))$$
$$A_2 = a * c - A_0 = a^2(\frac{1}{tan(\alpha)} - tan(\alpha)$$

Und damit kann das gesuchte Verhältnis gebildet werden:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1 + tan(\alpha)}{\frac{1}{tan(\alpha)} - tan(\alpha)}$$

3.30 Lösung: 2 Quadrate

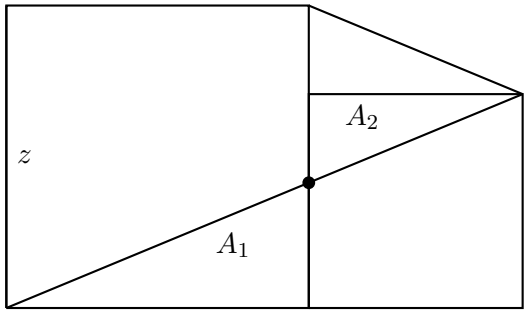

Abbildung 3.30: Lösung 2 Quadrate

Es gilt der Strahlensatz:

$$\frac{b}{a+b} = \frac{z}{a}$$
$$z = \frac{ab}{a+b}$$

Und die Flächen der Dreiecke berechnen sich:

$$A_1 = \frac{az}{2} = A_2 = \frac{(a-z)b}{2}$$
$$az = (a-z)b$$
$$z(a+b) = ab$$
$$z = \frac{ab}{a+b}$$

Also kann man sagen, dass nach dem Strahlensatz sich z im Bereich von 0 bis 1 bewegt für beliebige a b Werte.
Und für solch ein z sind die Flächen der Dreiecke A_1 und A_2 gleich.

3.31 Lösung: 3 Viertelkreise im Rechteck

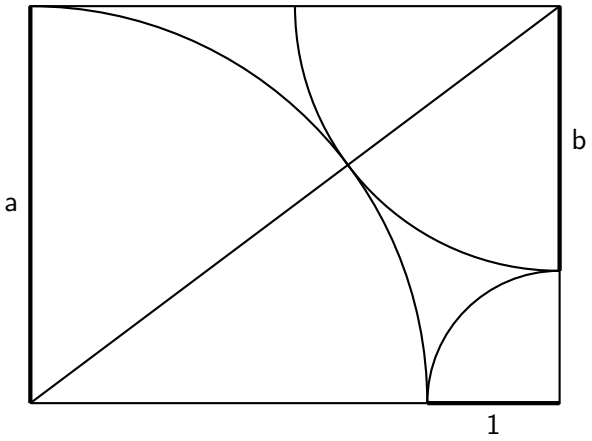

Abbildung 3.31: Lösung 3 Viertelkreise im Rechteck

Bedingungen für a und b ist:

$$a = b + 1$$

Nun gilt nach Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+1)^2 + (b+1)^2 \\ \cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} &= \cancel{a^2} + 2a + 1 + \cancel{b^2} + 2b + 1 \\ 2ab &= 2a + 2b + 2\end{aligned}$$

Ersetze nun a:

$$\begin{aligned}(b+1)b &= b + 1 + b + 1 \\ b^2 - b - 2 &= 0\end{aligned}$$

Wir erraten $b = 2$ und erhalten damit $a = 3$.
Und damit ist die Fläche $a * b = 6$.

Die 2. Lösung kann mit dem Satz von Vieta[17] gebildet werden und man erhält $b = -1$ und $a = 0$ und folglich die triviale Lösung der Fläche 1.

[17] Sind x_1 und x_2 Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$, dann ist $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 * x_2 = q$

3.32 Lösung: 4 Vierecke im Rechteck

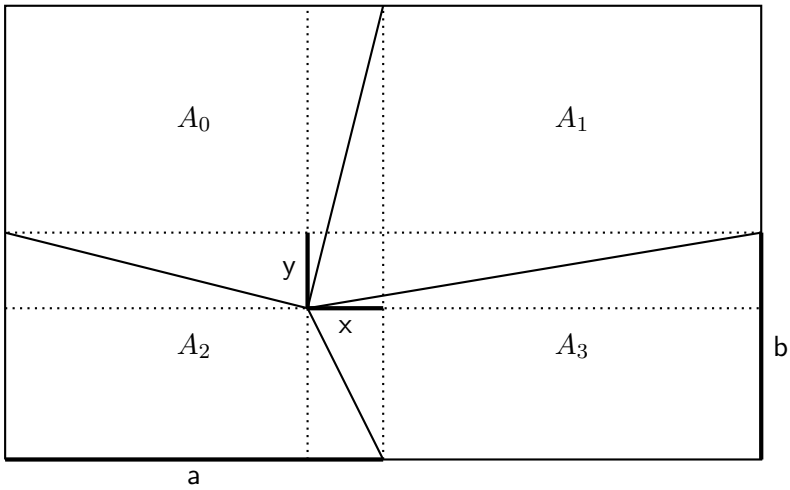

Abbildung 3.32: Lösung 4 Vierecke im Rechteck

Die Flächen berechnen sich wie folgt:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= 16 = (a-x)b + \frac{x(b+y)}{2} + \frac{y(a-x)}{2} \\
A_1 &= 19 = (a+x)(b+y) - \frac{y(a+x)}{2} - \frac{x(b+y)}{2} \\
A_2 &= 11 = (a-x)(b-y) + \frac{x(b-y)}{2} + \frac{y(a-x)}{2} \\
A_3 &= 14 = a(b-y) + \frac{x(b-y)}{2} + \frac{y(a+x)}{2}
\end{aligned}
$$

Alle 4 Flächen werden ausmultipliziert:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= ab - bx + bx/2 + \cancel{xy/2} + ay/2 - \cancel{xy/2} \\
&= ab - bx/2 + ay/2 \\
A_1 &= ab + bx + ay + \cancel{xy} - ay/2 - \cancel{xy/2} - bx/2 - \cancel{xy/2} \\
&= ab + bx/2 + ay/2 \\
A_2 &= ab - bx - ay + \cancel{xy} + bx/2 - \cancel{xy/2} + ay/2 - \cancel{xy/2} \\
&= ab - bx/2 - ay/2 \\
A_3 &= ab - ay + bx/2 - \cancel{xy/2} + ay/2 + \cancel{xy/2} \\
&= ab + bx/2 - ay/2
\end{aligned}
$$

Nun betrachten wir folgende Differenzen:

$$
\begin{aligned}
A_1 - A_0 = 3 &= bx/2 + \cancel{ay/2} - \cancel{ay/2} \\
3 &= bx \\
A_1 - A_2 = 8 &= bx/2 + ay/2 + bx/2 + ay/2 \\
8 &= bx + ay \\
5 &= ay
\end{aligned}
$$

Dann bestimmen wir A_0 und A_3:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= ab - 3/2 + 5/2 => ab = 15 \\
A_3 &= ab + 3/2 - 5/2 = ab - 1
\end{aligned}
$$

Und damit ist klar: $A_3 = 14cm^2$. Dies gilt für a*b=15, sprich für viele a b Kombinationen. Bsp. a=3, b=5.

3.33 Lösung: 4 Quadrate

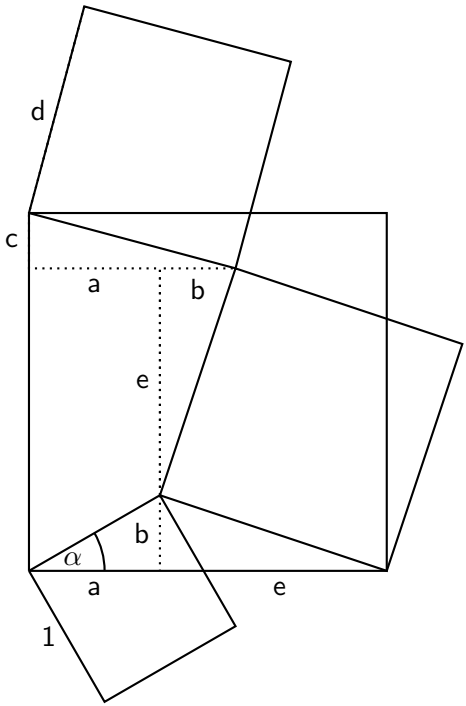

Abbildung 3.33: Lösung 4 Quadrate

Folgende trigometrischen Zusammenhänge im rechtwinkligen Dreieck sind fest zu hakten:

$$b = sin(\alpha)$$
$$a = cos(\alpha)$$

Und da wir kongruente Dreiecke vorliegen haben:

$$c = a + e - b - e$$
$$c = a - b$$

Und wieder kommt der Satz vin Pythagoras zur Anwendung:

$$
\begin{aligned}
d &= \sqrt{(a-b)^2 + (a+b)^2} \\
d &= \sqrt{2 * (a^2 + b^2)} \\
d &= \sqrt{2 * (sin(\alpha))^2 + cos(\alpha)^2)} \\
d &= \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Damit ist die Fläche des obersten Quadrates 2.

3.34 Lösung: 5 Rechtecke

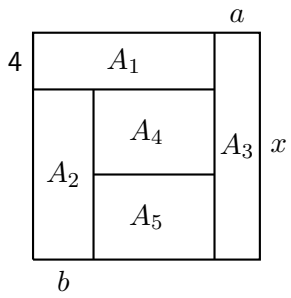

Abbildung 3.34: Lösung 5 Rechtecke

Folgende Bedingungen für die Rechtecke gelten:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{x^2}{5} \\
A_1 &= 4 * (x - a) \\
A_2 &= b * (x - 4) \\
A_3 &= a * x \\
A_0 &= A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5
\end{aligned}
$$

Wir setzen $A_3 = A_0$:

$$
\begin{aligned}
ax &= \frac{x^2}{5} && \mid * \frac{5}{x} \\
5a &= x
\end{aligned}
$$

Wir setzen $A_1 = A_0$ und ersetzen x mit $5a$:

$$
\begin{aligned}
4 * (5a - a) &= \frac{(5a)^2}{5} \\
16 * a * 5 &= 25a^2 && \mid /a \\
a &= \frac{16}{5} = 3.2 \\
x &= 5a = 16 \\
b &= \frac{A}{16 - 4} \approx 4.2667
\end{aligned}
$$

3.35 Lösung: 3 Kreise

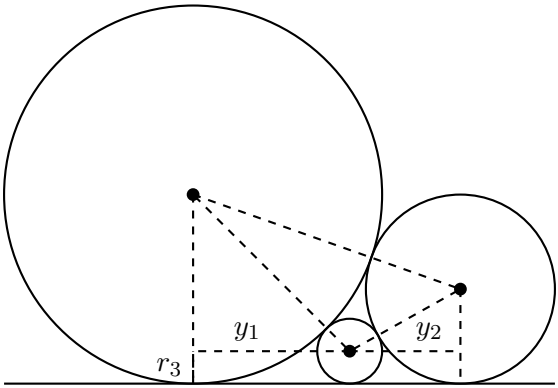

Abbildung 3.35: Lösung 3 Kreise

es gilt:

$$
\begin{aligned}
y &= y_1 + y_2 \\
y^2 &= (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4 * r_1 * r_2 \\
y_1^2 &= (r_1 + r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2 = 4 * r_1 * r_3 \\
y_2^2 &= (r_2 + r_3)^2 - (r_2 - r_3)^2 = 4 * r_2 * r_3
\end{aligned}
$$

Wir quadrieren die erste Gleichung

$$
\begin{aligned}
y^2 &= y_1^2 + y_2^2 + 2 * \sqrt{y_1^2 * y_2^2} \\
\cancel{4} * r_1 * r_2 &= \cancel{4} * r_1 * r_3 + \cancel{4} * r_2 * r_3 + 2 * \sqrt{\cancel{4} * r_1 * r_3 * \cancel{4} * r_2 * r_3} \\
r_1 * r_2 &= r_3(r_1 + r_2 + 2 * \sqrt{r_1 * r_2}) \\
r_3 &= \frac{r_1 * r_2}{r_1 + r_2 + 2 * \sqrt{r_1 * r_2}}
\end{aligned}
$$

Wir setzen $r_1 = 4$ und $r_2 = 2$ ein und erhalten:

$$
r_3 = \frac{8}{6 + 2 * \sqrt{8}}
$$

3.36 Lösung: Viertel- Halb- Kreis

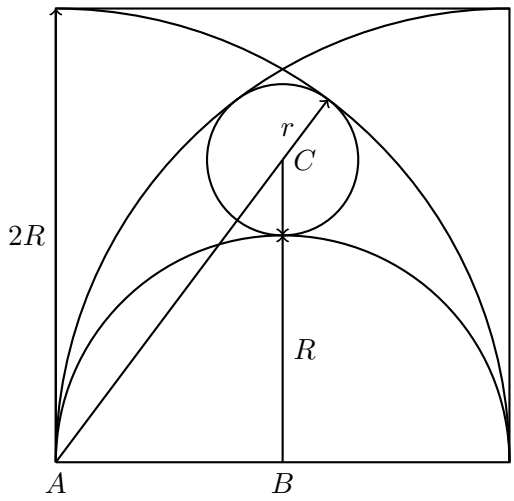

Abbildung 3.36: Lösung Viertel- Halb- Kreis

Im Dreieck ABC gilt der Pythagoras:

$$
\begin{aligned}
(2R - r)^2 &= R^2 + (R + r)^2 \\
4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2} &= R^2 + R^2 + 2Rr + \cancel{r^2} \\
2R^2 &= 6Rr \\
R &= 3r
\end{aligned}
$$

3.37 Lösung: 3 Kreise im Quadrat

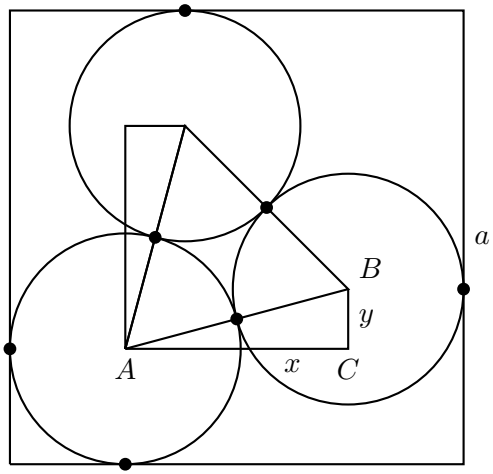

Abbildung 3.37: Lösung 3 Kreise im Quadrat

Verbindet man die 3 Kreis Mittelpunkte, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck. Dieses hat einen Winkel von je 60°. Dann ergibt sich aus Symmetrie Gründen der Winkel im Dreieck ABC von 15° und es gelten folgende Beziehungen:

$$x = a - 2r$$
$$cos(15°) = \frac{x}{2r}$$

Und damit kann r_3 folgendes gesagt werden:

$$cos(15°) = \frac{a - 2r}{2r}$$
$$2r * cos(15°) = a - 2r$$
$$2r * (1 + cos(15°)) = a$$

Und damit ergibt sich für r:

$$r = \frac{a}{2 * (1 + cos(15°))} \approx 2.54$$

3.38 Lösung: 3 Kreise

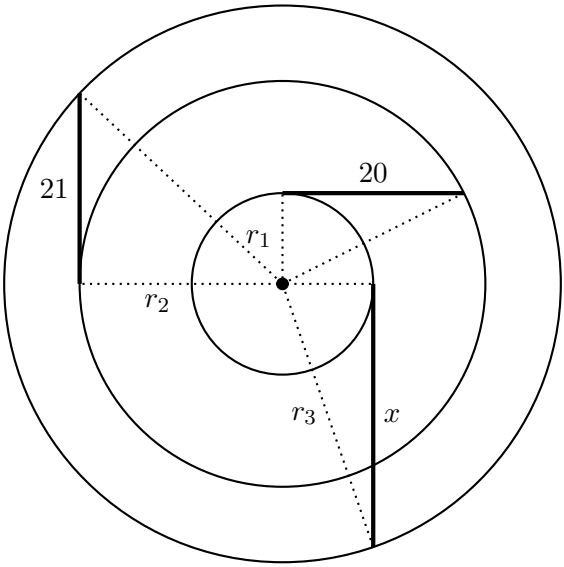

Abbildung 3.38: Lösung 3 Kreise

In den Dreiecken gelten folgende Beziehungen:

$$r_2^2 = 20^2 + r_1^2$$
$$r_3^2 = 21^2 + r_2^2$$
$$r_3^2 = x^2 + r_1^2$$

Und damit kann r_3 folgendes gesagt werden:

$$r_3^3 = 21^2 + 20^2 + r_1^2$$

Und damit ergibt sich für x:

$$x^2 = r_3^2 - r_1^2$$
$$x = \sqrt{21^2 + 20^2} = 29$$

Kapitel 4

Sätze

4.1 Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

wobei c die Hypothenuse und a. b die Katheten sind.

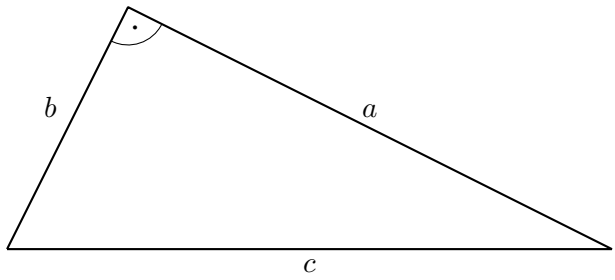

Abbildung 4.1: Pythagoras

Beweis:
Dieser befindet sich auf Seite 120.

4.2 Höhensatz

In einem rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$h^2 = p * q$$

wobei h die Höhe über der Hypothenuse sei und diese in p und q teilt.

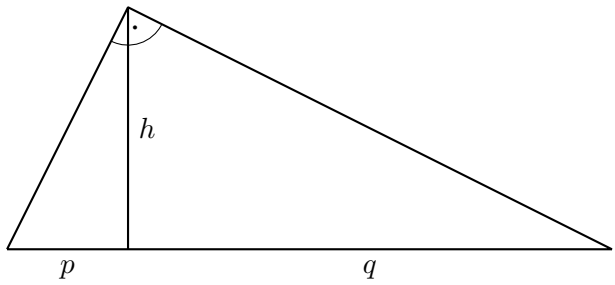

Abbildung 4.2: Höhensatz

Beweis:
Dieser befindet sich auf Seite 121.

4.3 Kathetensatz

In einem rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$a^2 = q * c$$
$$b^2 = p * c$$

wobei h die Höhe über der Hypothenuse sei und diese in p und q teilt.

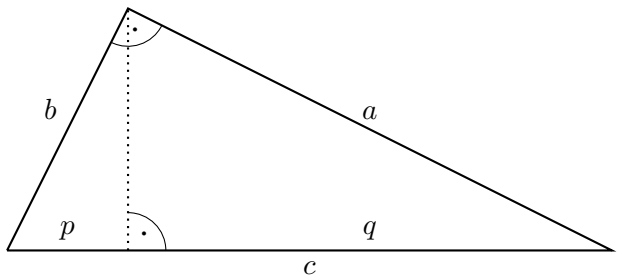

Abbildung 4.3: Kathetensatz

Beweis:
Dieser befindet sich auf Seite 122.

4.4 Sinussatz

In einem beliebigen Dreieck gilt:

$$\frac{sin(\alpha)}{a} = \frac{sin(\beta)}{b}$$

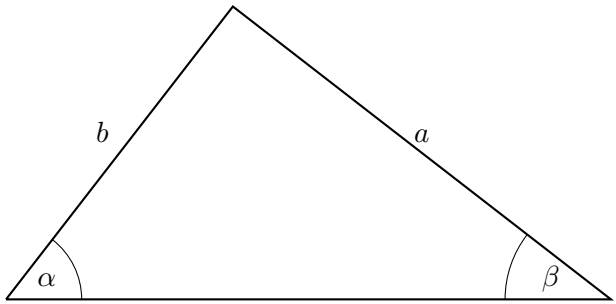

Abbildung 4.4: Sinussatz

Beweis:
Dieser befindet sich auf Seite 124.

4.5 Cosinussatz

In einem beliebigen Dreieck gilt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * cos(\alpha)$$

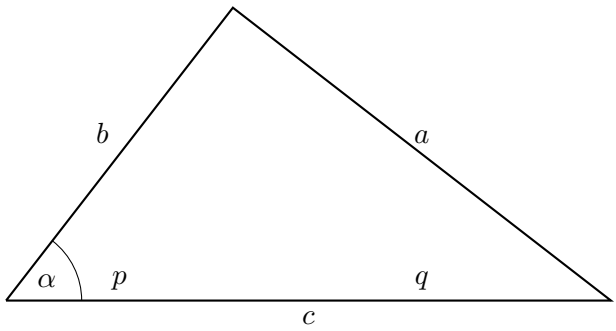

Abbildung 4.5: Cosinussatz

Beweis:
Dieser befindet sich auf Seite 125.

4.6 Dreiecks Ungleichung

In einem beliebigen Dreieck gilt: Die Summe zweier Seitenlängen ist stets größer als die Länge der dritten Seite.

$$a + b > c$$
$$a + c > b$$
$$b + c > a$$

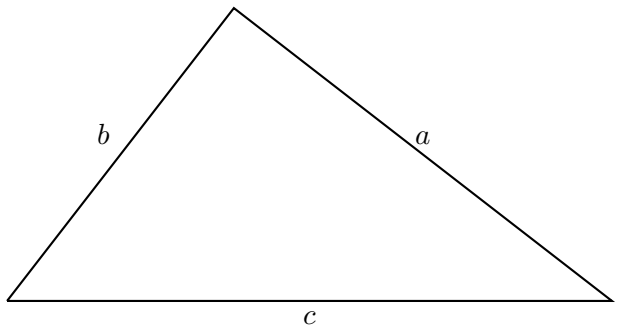

Abbildung 4.6: Dreiecks Ungleichung

Beweis:
Dieser befindet sich auf Seite 126.

4.7 Innenwinkelsatz

In einem beliebigen Dreieck gilt: Die Summe aller Innenwinkel beträgt 180°.

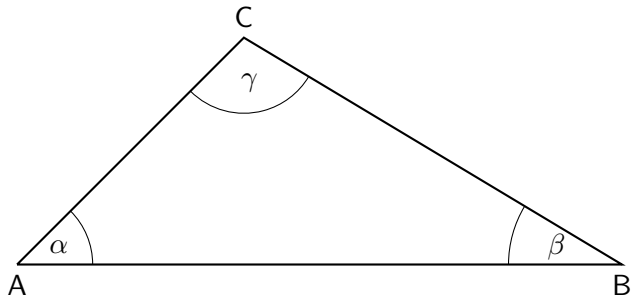

Abbildung 4.7: Innenwinkelsatz

Beweis:
Dieser befindet sich auf Seite 127.

4.8 Umfangwinkel-Satz

Gegeben sei ein Kreis mit der Sehne AB. Dann gilt für einen beliebigen Punkt C $\neq$ A,B auf dem Kreis:

$$\gamma = 2\alpha$$
$$\alpha = \alpha'$$

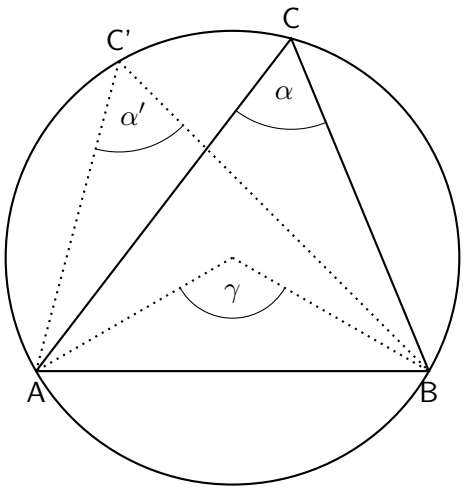

Abbildung 4.8: Umfangwinkel-Satz

Beweis:
Dieser befindet sich auf Seite 128.

4.9 Sehnen-Satz

Gegeben sei ein Kreis mit den Sehnen[18] $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ und dem Schnittpunkt S. Dann gilt:

$$\overline{SA} * \overline{SC} = \overline{SB} * \overline{SD}$$

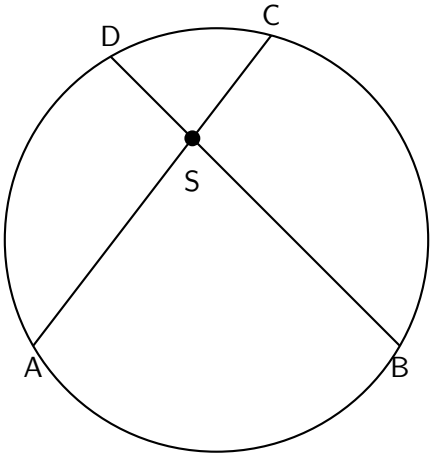

Abbildung 4.9: Sehnen-Satz

Beweis:
Dieser befindet sich auf Seite 129.

[18] Eine Sehne einer ebenen Kurve ist eine Verbindungsstrecke zweier Punkte auf der Kurve.

4.10 Sekanten-Satz

Gegeben sei ein Kreis mit den Sekanten[19] $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ und dem Schnittpunkt S ausserhalb des Kreises. Dann gilt:

$$\overline{SA} * \overline{SB} = \overline{SD} * \overline{SC}$$

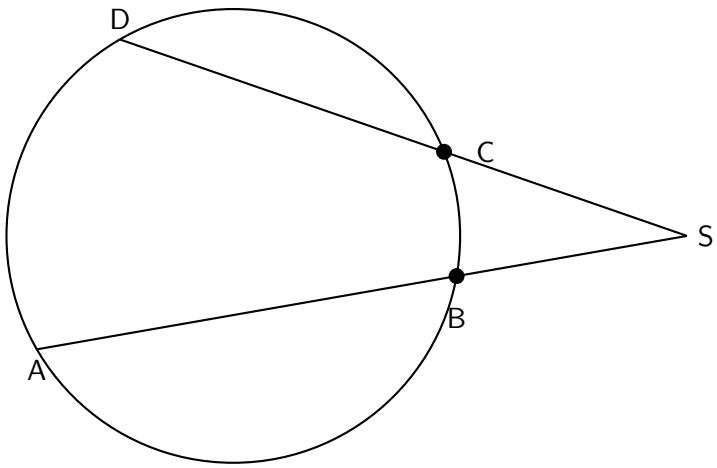

Abbildung 4.10: Sekanten-Satz

Beweis:
Dieser befindet sich auf Seite 130.

[19] Gerade, die eine Kurve, besonders einen Kreis, schneidet

4.11 Tangenten-Sekanten-Satz

Gegeben sei ein Kreis mit der Tangente[20] $\overline{SA}$ und einer Sekante $\overline{SC}$ mit dem Schnittpunkt S. Dann gilt:

$$\overline{SA}^2 = \overline{SD} * \overline{SC}$$

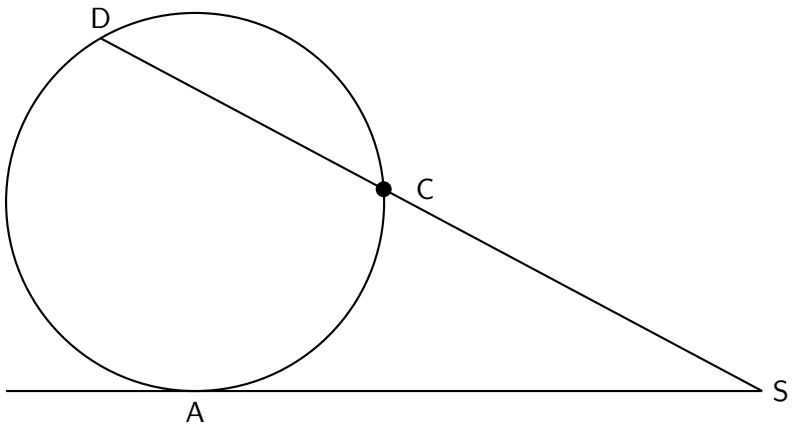

Abbildung 4.11: Tangenten-Sekanten-Satz

Beweis:
Dieser befindet sich auf Seite 131.

[20] Eine Tangente ist in der Geometrie eine Gerade, die eine gegebene Kurve in einem bestimmten Punkt berührt

Kapitel 5

Beweise

5.1 Beweis: Pythagoras

Gegeben sei das Quadrat mit der Kantenlänge c und 4 kongruente Dreiecke mit c als Hyptothenuse.

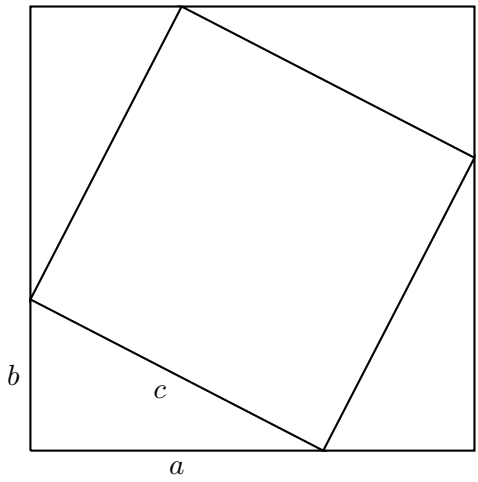

Abbildung 5.1: Beweis: Pythagoras

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= c^2 + 4\frac{ab}{2} \\
a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 2ab \\
a^2 + b^2 &= c^2
\end{aligned}
$$

5.2 Beweis: Höhensatz

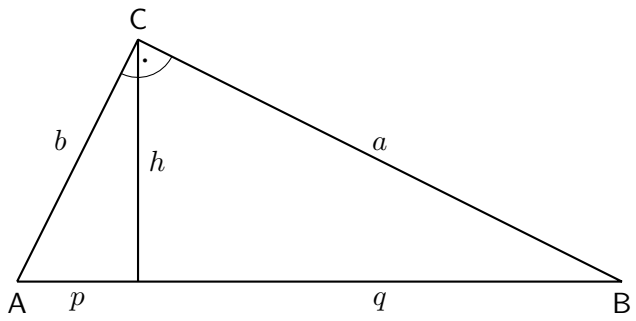

Abbildung 5.2: Beweis: Höhensatz

es gilt der Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned} b^2 &= p^2 + h^2 \\ h^2 &= a^2 - q^2 \\ a^2 &= (p+q)^2 - b^2 \end{aligned}$$

mit (5.3) in (5.5) eingesetzt:

$$h^2 = (p+q)^2 - b^2 - q^2$$

und (5.5) wird nun nach (5.5) eingesetzt:

$$\begin{aligned} h^2 &= (p+q)^2 - p^2 - h^2 - q^2 \\ 2h^2 &= p^2 + 2pq + q^2 - p^2 - q^2 \\ 2h^2 &= 2pq \\ p^2 &= pq \end{aligned}$$

5.3 Beweis: Kathetensatz

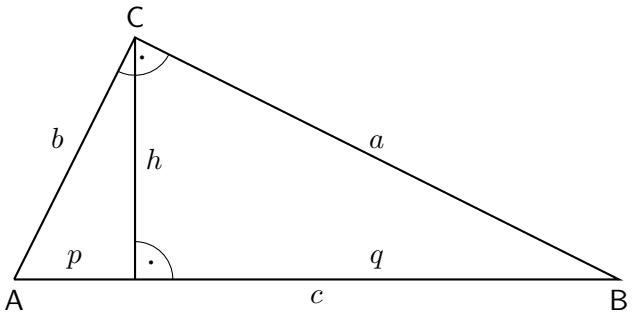

Abbildung 5.3: Beweis: Kathetensatz

Es gilt der Satz des Pythagoras:

$$h^2 = b^2 - p^2$$
$$h^2 = a^2 - q^2$$
$$b^2 = c^2 - a^2$$
$$c = p + q$$

mit (5.5) gleichgesetzt (5.5):

$$a^2 - q^2 = b^2 - p^2$$

und (5.3) wird nun in (5.3) eingesetzt:

$$a^2 - q^2 = c^2 - a^2 - p^2$$

und mit (5.5) wird c eliminiert:

$$\begin{aligned}
2a^2 &= (p+q)^2 - p^2 + q^2 \\
2a^2 &= p^2 + 2pq + q^2 - p^2 + q^2 \\
2a^2 &= 2pq + 2q^2 \\
a^2 &= pq + q^2 \\
a^2 &= p(q+q) \\
a^2 &= pc
\end{aligned}$$

5.4 Beweis: Sinussatz

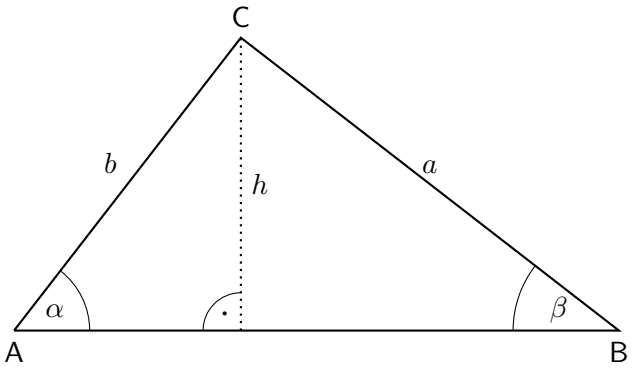

Abbildung 5.4: Beweis: Sinussatz

Es gelten folgende trigometrische Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck:

$$sin(\alpha) = \frac{h}{b}$$
$$sin(\beta) = \frac{h}{a}$$

löse (5.5) und (5.5) nach h auf und setzt gleich:

$$b * sin(\alpha) = a * sin(\beta)$$

und damit:

$$\frac{sin(\alpha)}{a} = \frac{sin(\beta)}{b}$$

5.5 Beweis: Cosinussatz

Es gilt der Satz des Pythagoras:

$$h^2 = a^2 - q^2$$
$$b^2 = h^2 + p^2$$

und folgender trigonometrischer Beziehungen:

$$p = b * cos(\alpha)$$

setze (5.5) und $p = (c - q)$ in (5.5) ein:

$$b^2 = a^2 - q^2 + (c - q)^2$$
$$b^2 = a^2 \cancel{- q^2} + c^2 - 2 * c * q \cancel{+ q^2}$$
$$a^2 = b^2 - c^2 + 2 * c * q$$

mit $q = (c - p)$ und (5.5) eingesetzt:

$$a^2 = b^2 - c^2 + 2 * c * (c - b * cos(\alpha)$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * cos(\alpha)$$

5.6 Beweis: Dreiecks Ungleichung

Es gilt: Die kürzeste Verbindung zwischen 2 Punkten A und B ist die Strecke.

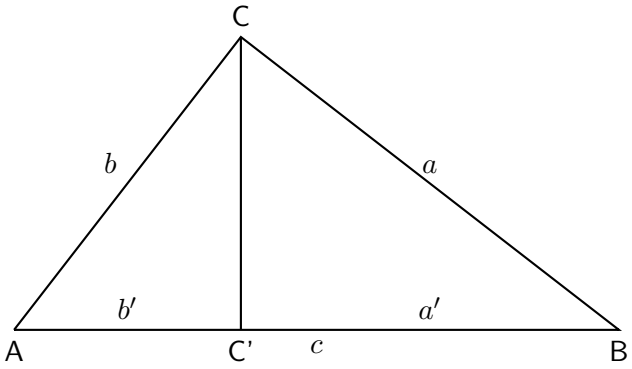

Abbildung 5.5: Beweis: Dreiecks Ungleichung

Nun fügt man einen Punkt C' an, welcher auf der Gerade AB liegt. Dieser Punkt bewegt sich nun rechtwinklig um $\epsilon > 0$ von der Linie AB weg nach C. Dadurch entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke. Bei denen ist die Hypothenuse stets größer wie die Basis Kathede auf der Gerade AB.

$$b > b' \, und \, a > a'$$

5.7 Beweis: Innenwinkelsatz

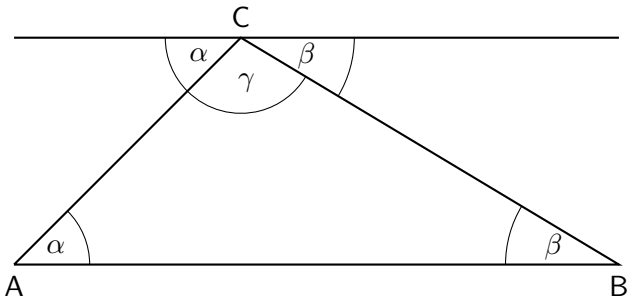

Abbildung 5.6: Beweis: Innenwinkelsatz

Es gibt 2 Stufenwinkel α und β, welche sich im Punkt C zeigen. Hier gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

5.8 Beweis: Umfangwinkel-Satz

Vom Kreismittelpunkt M werden gleichseitige Dreiecke zu den Punkten A,B,C gebildet. Damit lassen sich folgende Winkelbeziehungen aufstellen:

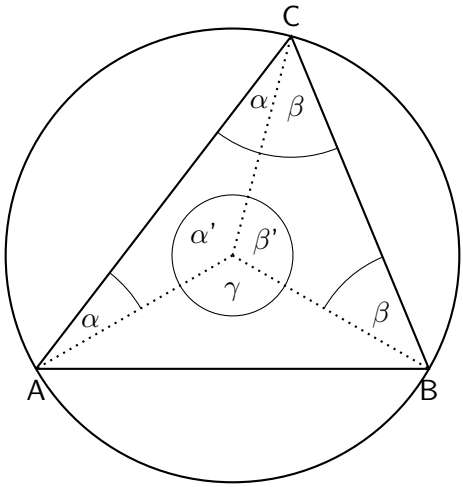

Abbildung 5.7: Beweis: Umfangwinkel-Satz

$$\alpha' = 180 - 2\alpha$$
$$\beta' = 180 - 2\beta$$
$$\gamma = 360 - \alpha' - \beta'$$

und damit:

$$\gamma = 2(\alpha + \beta)$$

5.9 Beweis: Sehnen-Satz

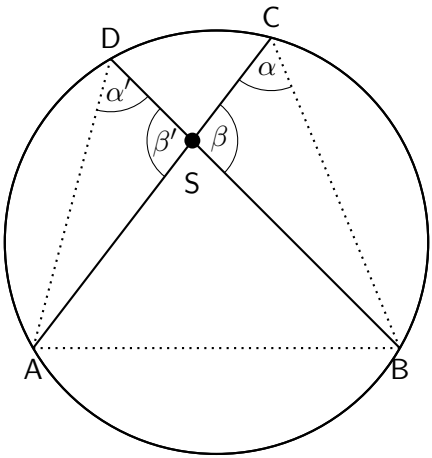

Abbildung 5.8: Beweis: Sehnen-Satz

Mit dem Umfangwinel-Satz über der Sehne $\overline{AB}$ gilt: $\alpha' = \alpha$ und mit dem Scheitelwinkel $\beta' = \beta$. Also sind alle 3 Winkel der Dreiecke gleich und diese zueinander ähnlich:

$$\triangle ASD \sim \triangle BSC$$

und damit der Strahlensatz:

$$\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SD}}{\overline{SC}}$$

5.10 Beweis: Sekanten-Satz

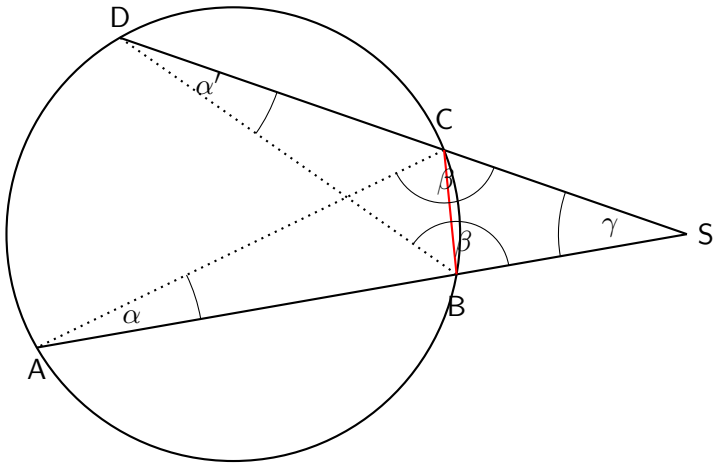

Abbildung 5.9: Beweis: Sekanten-Satz

Mit dem Umfangwinel-Satz über der Sehne $\overline{BC}$ gilt:

$$\alpha' = \alpha$$
$$\beta' = \beta$$

Also liegen ähnliche[21] Dreiecke vor:

$$\triangle ACS \sim \triangle DBS$$

und damit besagt der Strahlensatz:

$$\frac{\overline{SD}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{SC}}$$

[21] Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in zwei (und somit in allen drei) Winkeln übereinstimmen

5.11 Beweis: Tangenten-Sekanten-Satz

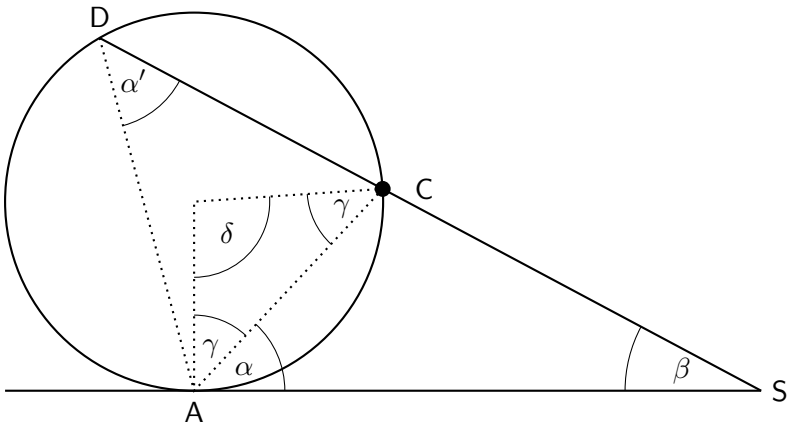

Abbildung 5.10: Beweis: Tangenten-Sekanten-Satz

Über der Sehne $\overline{AC}$ gilt nach dem Umfangwinkel-Satz:

$$\delta = 2\alpha'$$

Damit bestimmt sich im $\triangle ACM$

$$\gamma = \frac{180^\circ - 2\alpha'}{2} = 90^\circ - \alpha'$$

Da die Tangente einen rechten Winkel zum Radius bildet gilt:

$$\begin{aligned} \gamma + \alpha &= 90^\circ \\ 90^\circ - \alpha' + \alpha &= 90^\circ \\ \alpha &= \alpha' \end{aligned}$$

Damit liegen 2 ähnliche Dreiecke vor und es gilt der Strahlensatz:

$$\triangle SDA \sim \triangle SAC$$
$$\frac{\overline{SD}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SC}}$$
$$\overline{SA}^2 = \overline{SD} * \overline{SC}$$